

Teorie her

Theory of games

Vlastimil Čabla

Bakalářská práce
2009



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

*** nescannované zadání str. 1 ***

*** nescannované zadání str. 2 ***

ABSTRAKT

Práce se zabývá studiem teorie her. Představuje základní pojmy a klasifikaci her. Představuje maticovou hru. Popisuje hledání optimální strategie pro antagonistický konflikt metodou lineárního programování. Využívá metodu simplexové tabulky pro řešení lineárního programování. Práce dále nabízí příklady k procvičení.

Klíčová slova: teorie her, klasifikace her, maticová hra, antagonistický konflikt, lineární programování, simplexová tabulka.

ABSTRACT

The work deals with the study of game theory. It presents basic concepts and games classification. The work represents a matrix game. The work describes the search for the optimal strategy for antagonistic conflict using linear programming. It uses the method simplex's table for dealing with linear programming. The work also offers examples of the practice.

Keywords: theory of games, classification of games, matrix game, antagonistic conflict, linear programming, simplex's table.

Za poskytnutí materiálu a za neodmítnutí pomoci s touto prací chci poděkovat mému vedoucímu práce Ing. Liborovi Pekařovi.

Ve Zlíně 20. 5. 2009

Vlastimil Čabla

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.

V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD	8
I TEORETICKÁ ČÁST	9
1 MATEMATICKÝ APARÁT TEORIE HER	10
1.1 TEORIE MNOŽIN	10
1.2 TEORIE FUNKCE	10
1.3 TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI	11
2 ZÁKLADNÍ POJMY V TEORII HER	12
2.1 MATEMATICKÉ MODELY ROZHODOVACÍCH SITUACÍ	12
2.2 KLASIFIKACE ROZHODOVACÍCH SITUACÍ	14
2.3 MATEMATICKÝ MODEL A REALITA	15
3 ANTAGONISTICKÉ HRY	16
3.1 OPTIMÁLNÍ STRATEGIE V ANTAGONISTICKÉM KONFLIKTU	16
3.2 MATICOVÁ HRA	17
3.3 LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ	18
3.3.1 Simplexová tabulka	21
II PRAKTICKÁ ČÁST	26
4 PŘÍKLADY	27
4.1 HRA V NORMÁLNÍM TVARU	27
4.2 HRA VE TVARU CHARAKTERISTICKÉ FUNKCE	27
4.3 MATICOVÁ HRA	28
4.3.1 Ryzí strategie	28
4.3.1.1 Petr a Hynek	28
4.3.1.2 Tradiční turnaj	29
4.3.1.3 Vězňovo dilema	29
4.3.2 Smíšené strategie	30
4.3.2.1 Příklad	30
ZÁVĚR	32
ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ	33
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	34
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	35
SEZNAM OBRÁZKŮ	36
SEZNAM TABULEK	37
SEZNAM PŘÍLOH	38

ÚVOD

Tato bakalářská práce má za úkol popsat disciplínu moderní matematiky a tou je teorie her. Teorie her se uplatňuje v mnoha oborech. Na základě matematických modelů se snaží nacházet optimální řešení. Tyto matematické modely lze uplatňovat v oborech jako je ekonomie, politologie ale i například sociologie a biologie.

V práci je popsán všechen matematický aparát, který je potřebný k pochopení teorie her. Práce je rozdělena na teoretickou část a na praktickou. V teoretické části jsem se snažil srozumitelně formulovat studijní látku, tak jak jsem ji pochytil. Snažil jsem se, aby čtenář nebyl ochuzen o odvozování vztahů, i když si myslím, že ne každý je schopen tyto vztahy vstřebat. Zároveň jsem se snažil, aby základní věci byly opravdu srozumitelné pro čtenáře. Mým úkolem bylo vymyslet příklady na maticové hry a antagonistický konflikt. Tak jsem učinil. Přidal jsem pár příkladů na procvičení zápisu her.

Práce nejdříve představuje matematický aparát potřebný ke studii teorii her. Druhá kapitola je věnována pojům, kterými popisujeme a definujeme hry. V práci se věnuji i maticovým hrám a jejich optimálním strategiím. Dozvídáme se také o lineárním programování a simplexové metodě.

Součástí práce je prezentace v MS PowerPoint, která shrnuje praktické poznatky z této práce. Tato prezentace by mohla sloužit jako výukový materiál. Tak jsem k prezentaci také přistupoval. V prezentaci nejsou odvozovány vztahy. Studovaná látka je tam učena názorně na příkladech.

Téma bakalářské práce jsem si vybral, protože mě baví matematika a chtěl jsem blíže poznat její aplikace v praktickém světě. Jsem rád, že jsem si vybral toto téma.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 MATEMATICKÝ APARÁT TEORIE HER

Při popisu teorie her používáme tři hlavní matematické teorie. Jsou jimi teorie množin, teorie funkce a teorie pravděpodobnosti. Každá z těchto teorií je poměrně obsáhlá a komplikovaná. Pro pochopení teorie her postačí základní pochopení těchto tří teorií. Nebudeme se proto pouštět do jejich zevrubného popisu.

1.1 Teorie množin

Teorie množin je matematická teorie, která se zabývá množinami. Množinu chápeme jako souhrn libovolných navzájem rozlišitelných objektů. Tyto objekty nazýváme prvky množiny. Výrobní programy, technologické procesy, důsledky ekonomických, technických i vojenských rozhodnutí, rozložení pravděpodobností na konečných množinách a řada dalších stavů a jevů v objektivní realitě bývá charakterizována uspořádanými n -ticemi čísel. Je výhodné, je-li možné s takovými n -ticemi čísel provádět určité matematické operace.

Jsou-li $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ a $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ dvě n -tice čísel, je jejich součet $x + y$ definován jako n -tice $[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]$. Je-li k reálné číslo, je součin kx definován jako n -tice $[kx_1, kx_2, \dots, kx_n]$. Množina uspořádaných n -tic čísel, na níž jsou definovány operace sčítání dvou n -tic a násobení n -tice číslem, přičemž tyto operace mají určité vlastnosti, se nazývá *vektorový* nebo *lineární prostor*. Jeho prvky se nazývají krátce *vektory*.

1.2 Teorie funkce

Teorie funkcí definuje funkci jako pravidlo f , které přiřazuje každému prvku x z množiny X právě jeden prvek y z množiny Y , a nazývá se zobrazení množiny X do množiny Y . Prvek y přiřazený zobrazením f prvku x se značí $f(x)$. Množina X se nazývá *definiční obor* zobrazení f .

U funkcí v teorii her nás budou zajímat maxima a minima funkcí. Minimum i maximum může být lokální nebo globální. Lokální platí pro okolí bodu x a globální pro celou funkci.

1.3 Teorie pravděpodobnosti

Teorie pravděpodobnosti je matematická disciplína zkoumající zákonitosti jevů, které mohou, ale nemusí nastat. Pravděpodobnost těchto jevů se vyjadřuje číslem. Pravděpodobnost jevu označujeme reálným číslem od 0 do 1. Jev, který nemůže nastat, má pravděpodobnost 0. Jistá událost má pravděpodobnost 1.

2 ZÁKLADNÍ POJMY V TEORII HER

Člověk je přirozeně vystavován ve svém životě situacím, ve kterých se musí rozhodovat. V každé rozhodovací situaci může svým rozhodnutím ztratit či získat. Teorie her se snaží popisovat rozhodovací situace a na základě analýzy možných rozhodnutí určit jak velký je možný zisk či ztráta [4]. Aby bylo možné rozhodovací situace matematicky řešit je potřeba převést do matematického jazyka. V této kapitole se naučíme klasifikovat rozhodovací situace.

2.1 Matematické modely rozhodovacích situací

Teorie her se snaží rozhodovací situace popisovat matematickým modelováním. Rozhodovací situace je možné matematicky popsat více způsoby. Můžeme navrhnout obecný model ve formě soustavy matematických objektů, kterým lze popsat všechny možné situace. Nevýhodou tohoto obecného modelu je jeho složitost pro běžné rozhodovací situace. Proto se používají základní matematické modely, které jsou méně obecné a jsou specifické pro konkrétní situace. Tento požadavek splňuje model rozhodovací situace, který budeme nazývat *hra v normálním tvaru*.

V každé rozhodovací situaci vystupují *hráči*. Hráč je každá osoba, instituce či mechanismus, který může svým rozhodnutím nebo zásahem do hry ovlivnit výsledek. Hráče dělíme na *inteligentní*, *neinteligentní*. Inteligentní hráč se snaží maximalizovat svůj zisk a minimalizovat svoji ztrátu. Pod pojmem neinteligentní hráč si představujeme mechanismy, které svoji rozhodovací strategii volí na základě náhody. Jako dostačující příklad uvádíme počasí, u kterého nemůžeme s určitostí předpovědět jak se zachová. Počet hráčů bude vždy konečný a budeme je značit čísly 1, 2, ..., N. Množinu všech hráčů označíme jako $Q = \{1, 2, \dots, N\}$.

Každý z hráčů má k dispozici určitou množinu *strategií*, ze které může v dané situaci vybírat konkrétní rozhodnutí. Každý hráč $i \in Q$ vybírá z množiny X_i , která obsahuje všechny jeho strategie. Množina X_i je tedy *prostor strategií hráče i*.

Každému hráči náleží také *výplatní funkce* $M_i(\mathbf{x})$. Jestliže výplatní funkce $M_i(\mathbf{x})$ bude mít kladnou hodnotu, hráč je v zisku. Pokud naopak $M_i(\mathbf{x})$ bude navývat záporné hodnoty, je hráč ve ztrátě.

Hru v normálním tvaru můžeme tedy krátce zapsat následovně

$$\{Q; X_1, X_2, \dots, X_N; M_1(x), M_2(x), \dots, M_N(x)\}. \quad (2.1)$$

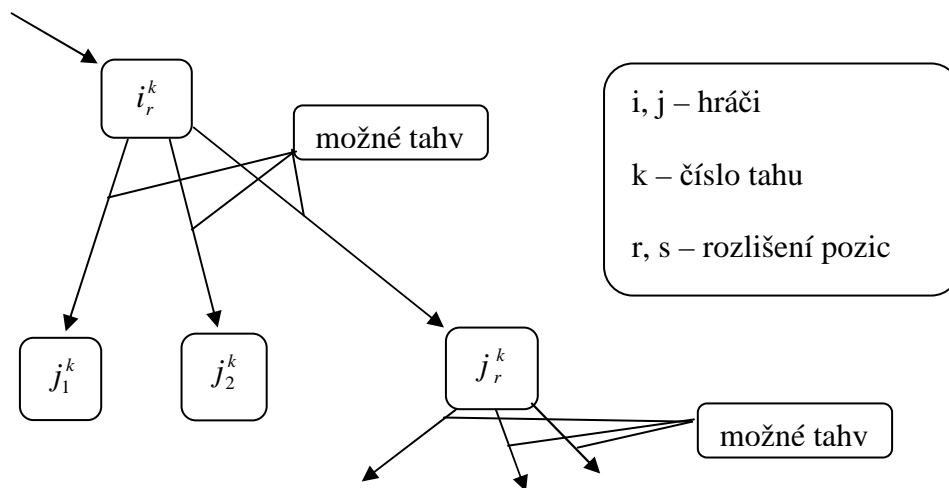
Další popis rozhodovací situace je *hra ve tvaru charakteristické funkce*. Tento tvar popisuje hry, ve kterých se hráči snaží maximalizovat své zisky pomocí tvoření koalic. Záleží také na postavení hráčů v koalici. Pokud jeden hráč má majoritnější postavení ve sdružení, může to mít vliv na rozdělení zisku v koalici.

V popisu hry ve tvaru charakteristické funkce, budeme účastníky taktéž označovat čísly a nazývat hráči. Koalici můžeme charakterizovat soupisem čísel hráčů, kteří koalici tvoří. Můžeme tedy mluvit o koalicích jako podmnožinách množiny Q : $K \subset Q, L \subset Q, \dots$. Je-li například $Q = \{1,2,3,4\}$ jsou možné koalice například $\{1,2,4\}; \{1\}; \{3,4\}$ atd.

Jsou-li K_1, K_2, \dots, K_s všechny možné koalice z dané množiny hráčů Q , můžeme každé z koalic přiřadit číslo $v(K_j), j = 1, 2, \dots, s$, udávající celkovou částku, kterou si koalice K_j může zajistit bez spolupráce s hráči, kteří v K_j nejsou.

Poslední popis rozhodovací situace je *hra v explicitním tvaru*. Hra v explicitním tvaru popisuje rozhodovací situaci ve formě grafu.

Představme si jednoduchý případ hry nim, kdy dva hráči mají před sebou dvě hromádky, z nichž každá se skládá ze dvou fazolí. Hráč číslo 1 musí vzít z jedné hromádky jednu nebo dvě fazole. Odebrané fazole se do hry nevracejí. Potom je na tahu hráč číslo 2. Ten opět musí vzít z jedné (neprázdne) hromádky jednu nebo dvě fazole, které se taktéž nevracejí. Pak je na řadě hráč 1 se stejnými možnostmi atd. Prohrává ten hráč, který musí vzít ze hry poslední fazoli.



Obr. (2.1)

2.2 Klasifikace rozhodovacích situací

Abychom mohli zvolit optimální chování v jednotlivých rozhodovacích situacích, je nutné co nejlépe specifikovat všechny okolnosti, za kterých jednotliví účastníci volí svá rozhodnutí. Rozhodovací situace je možné klasifikovat podle následujících kritérií: počet účastníků, přítomnost či nepřítomnost náhodných mechanismů, informovanost hráčů v okamžiku jejich rozhodování, počet možných strategií, způsob generování a dělení výher.

V mnoha rozhodovacích situacích hrají zásadní úlohu *náhodné mechanismy*. Jak už bylo řečeno, náhodný mechanismus nazýváme jako neinteligentního hráče. Většinou rozdělení na inteligentní a neinteligentní hráče nestačí, protože někteří rozhodovatelé nesou v sobě prvky racionality, ale současně nevyužívají důsledně všech možností k dosažení maximální výhry. Stupeň inteligence, zapojené do volby strategií, lze popsat parametrem $p \in \langle 0,1 \rangle$ s tím, že $p = 0$ značí absenci inteligentní složky a $p = 1$ značí inteligentního hráče. Takto charakterizované hráče nazýváme *p-inteligentní*.

Jsou-li v rozhodovací situaci alespoň dva inteligentní hráči, budeme nazývat takovou rozhodovací situaci *konfliktem*. Vedle inteligentních hráčů se mohou v konfliktu vyskytovat i hráči neinteligentní nebo *p-inteligentní*.

Pokud je v rozhodovací situaci pouze jeden hráč inteligentní a jeden hráč neinteligentní, budeme mluvit o *rozhodování při riziku* nebo *rozhodování při nejistotě*. Pokud inteligentní

hráč zná rozložení pravděpodobností, podle něhož neinteligentní hráč volí své strategie, hovoříme o rozhodování při riziku. Pokud inteligentní hráč nezná toto rozložení používáme označení situace rozhodování při nejistotě.

U konfliktů, v nichž se strategie skládá s postupných tahů, je důležité rozlišit případ, kdy hráči mají před každým tahem přesnou informaci o tom, co se doposud v partii dělo od případů, kdy tyto informace jsou částečné. V první případě mluvíme o *hrách s úplnou informací*, v druhém případě o *hrách s neúplnou informací*.

Dále rozlišujeme jestli všichni hráči mají konečně mnoho strategií a nebo všichni hráči vybírají z nekonečně mnoho strategií. Matematický aparát, který se k rozboru modelů využívá, se v obou případech liší. Analogicky se hry nazývají *konečné* a *nekonečné*.

Při rozhodování je důležitým vodítkem rozdělení výher. Pokud je součet výher všech hráčů vždy roven konstantě, pak se modely nazývají *hry s konstantním součtem*. U *hry s nekonstantním součtem* závisí celkový objem výher na tom, jaké strategie hráči volí. Rozhodovací situace, jejichž modelem je hra s konstantním součtem, má pro hráče výrazně antagonistický charakter. Pokud v takovém modelu jeden hráč získá výhodu, pro druhého hráče to znamená stejně velkou nevýhodu. U her s nekonstantním součtem má smysl pro hráče uvažovat o spolupráci a snažit se získat co největší částku pro dělení výhry.

Antagonistický konflikt je hra dvou hráčů, kteří stojí proti sobě. To znamená, že kolik jeden z nich ztratí získá ten druhý. Neantagonistický konflikt je konflikt taktéž dvou hráč, ale jejich zájmy nemusí být v protikladu. Je dokonce výhodné spolu vytvořit dohodu, koalici.

2.3 Matematický model a realita

Při aplikaci teorie her se snažíme provést rozbor jednotlivých rozhodovacích situací a na jeho základě provést podklady pro racionální rozhodnutí. Tento rozbor můžeme provádět ze dvou hledisek. *Normativní hledisko (stanovisko)* popisuje jak se má v rozhodovací situaci chovat účastník vystupující v roli inteligentního hráče. *Deskriptivní hledisko (stanovisko)* popisuje jak se bude v situaci chovat průměrný jedinec.

Teorie her studuje rozhodovací situace především z hlediska normativního. Deskriptivní hledisko je spíše předmětem studií psychologických či sociologických. [5]

3 ANTAGONISTICKÉ HRY

Antagonistickým konfliktem zde budeme rozumět rozhodovací situaci, v níž vystupují dva inteligentní rozhodovatelé, kteří si po volbě svých rozhodnutí rozdělí pevnou částku, jejíž výše nezávisí na tom, jaká rozhodnutí zvolili. Matematickým modelem antagonistického konfliktu je hra v normálním tvaru s konstantním součtem

$$\{Q = \{1, 2\}; X, Y; M_1(x, y); M_2(x, y)\}, \quad (3.1)$$

kde pro všechna $(x, y) \in X \times Y$ platí $M_1(x, y) + M_2(x, y) = \text{konstantní}$.

3.1 Optimální strategie v antagonistickém konfliktu

Nyní nás bude zajímat jaké strategie z prostorů X a Y jsou optimální. Pokud zvýšení výhry jednoho hráče znamená automaticky zmenšení výhry druhého hráče, pak za definici optimální strategie považujeme: strategie $\bar{x} \in X$ a $\bar{y} \in Y$ budou optimální pokud si hráči volbou jiné strategie nemohou zvýšit svoji výhru. Tyto strategie se nazývají *rovnovážné* (optimální). Rovnovážné strategie jsou definovány pouze jako dvojice. Nemůže se tedy stát, aby jeden hráč rovnovážnou strategií měl a druhý nikoliv. Strategie $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in Y$ nazveme rovnovážné, jestliže platí:

$$\begin{aligned} M_1(x, \bar{y}) &\leq M_1(\bar{x}, \bar{y}), \\ M_2(\bar{x}, y) &\leq M_2(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

pro všechna $\bar{x} \in X$ a $\bar{y} \in Y$.

Při hledání rovnovážných strategií je užitečné vědět, že každá hra s konstantním součtem je ekvivalentní s hrou v normálním tvaru s nulovým součtem. Protože je jedno, zda se hráči v antagonistické hře snaží každý maximalizovat svou výhru nebo zda se snaží maximalizovat rozdíl mezi vlastní výhrou a výhrou protivníkovou. Rovnovážnou strategii hledáme ve hrách s nulovým součtem a hry s konstantním součtem převádíme na tvar hry s nulovým součtem. Hru s nulovým součtem zapíšeme takto:

$$\{Q = \{1, 2\}; X, Y; M(x, y)\}. \quad (3.3)$$

Pro rovnovážné strategie u her s nulovým součtem pro všechna $\bar{x} \in X$ a $\bar{y} \in Y$ platí:

$$M(\bar{x}, y) \leq M(\bar{x}, \bar{y}) \leq M(\bar{x}, y). \quad (3.4)$$

Číslo $M(\bar{x}, \bar{y})$ se nazývá *cena hry*.

Věta 3.1. *Nechť (3.1) je hra s konstantním součtem rovným K . Potom \bar{x}, \bar{y} jsou rovnovážné strategie ve hře (3.1) tehdy a jen tehdy, jsou-li \bar{x}, \bar{y} rovnovážné strategie ve hře s nulovým součtem (3.3), kde $M(x, y) = M_1(x, y) - M_2(x, y)$.*

Antagonistickou hru můžeme vyjádřit jako tzv. *maticovou hru*.

3.2 Maticová hra

V antagonistickém konfliktu mají hráči na výběr z konečně mnoho strategií:

$$X = \{1, 2, \dots, m\},$$

$$Y = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.5)$$

Na základě volby strategie lze pro každého hráče sestavit výplatní funkce, kterých je také konečně mnoho, přesněji mn . Takovou funkci lze přehledně zapsat ve formě tabulky, v níž čísla řádků odpovídají číslům strategií hráče 1 a čísla sloupců číslům strategií hráče 2. Označíme-li $M(x, y) = a_{xy}$ pro $x \in X, y \in Y$, můžeme výplatní funkce dostatečně popsat pomocí matice typu (m, n) s prvky typu a_{xy} . Tuto matici nazýváme *matice hry* a zapisujeme ji ve tvaru:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Konflikt (hra), která má prostory strategií (3.5) a s výplatní funkcí zadanou maticí hry (3.6) se nazývá *maticová hra*.

Nyní nás zajímá, jak najít rovnovážnou strategii hráčů v maticové hře. Základní myšlenkou při hledání optimální strategie obou hráčů je snaha maximalizovat svoji výhru tím, že usilujeme o maximální ztrátu protihráče. Hráči tedy uvažují pro každou svoji strategii všechny možné strategie oponenta a hledají takovou strategii, která je nejméně poškodí.

Jestliže se v matici vyskytuje prvek, který je současně nejmenší na řádku, v němž se nachází a současně největší ve sloupci v němž se nachází, udává nám tento bod optimální strategii. Tento prvek nazýváme *sedlový prvek* matice. Tento sedlový prvek nám udává cenu hry.

$$\begin{bmatrix} 5 & \underline{\underline{-1}} & 3 \\ -1 & -2 & 8 \\ 7 & -3 & 9 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Ne vždy však sedlový prvek existuje matice A (3.8). V těchto případech se zavádí smíšené strategie. Výpočet rovnovážných strategií se provádí metodou *lineárního programování*.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5/2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

3.3 Lineární programování

Pojem optimální či rovnovážné strategie v teorii her souvisí s pojmem extrém funkce na množině. Vyhledáváním extrému funkce při podmínkách se zabývá matematické programování. Důležitou úlohou matematického programování je úloha lineárního programování. Jde o případ, kdy všechny funkce vystupující v zadání úlohy matematického programování jsou lineární.

Lineární programování nám pomůže vyřešit maticovou hru, pokud hra nemá jednoznačný sedlový prvek. Maticovou hru tedy řešíme pomocí lineárního programování.

Mějme maticovou hru s prostory strategií (3.5) a maticí hry (3.6). Hru dvou hráčů s nulovým součtem s prostory strategií

$$\begin{aligned} X^S &= \left\{ x; x^T = [x_1, x_2, \dots, x_m], \sum_{i=1}^m x_i = 1, x \geq 0 \right\} \\ Y^S &= \left\{ y; y^T = [y_1, y_2, \dots, y_m], \sum_{i=1}^m y_i = 1, y \geq 0 \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

a s výplatní funkcí

$$M^S(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = x^T A y$$

nazveme *smíšeným rozšířením* maticové hry.

Prvkům z původních prostorů strategie X a Y budeme říkat *ryzí strategie*, prvkům z prostorů X^S a Y^S budeme říkat *smíšené strategie*.

V rámci smíšených rozšíření lze najít řešení všech konečných antagonistických konfliktů. Tento fakt říká věta 3.2, která se nazývá *základní větou maticových her*.

Věta 3.2. *Smíšené rozšíření maticové hry má řešení v rovnovážných strategiích.*

Věta 3.2 je matematické tvrzení, které říká, že pro každou matici A existují dva vektory $\bar{x} \in X^S$ a $\bar{y} \in Y^S$ tak, že nerovnosti

$$x^T A \bar{y} \leq \bar{x}^T A \bar{y} \leq \bar{x}^T A y \quad (3.10)$$

platí pro všechna $x \in X^S$ a $y \in Y^S$.

Věta 3.3. *Rovnovážné strategie smíšeného rozšíření maticové hry se nemění, přičteme-li ke každému prvku matice hry totéž kladné nebo záporné číslo c . Cena hry s takto pozměněnou maticí je $v + c$, kde v je cena původní hry.*

Nechť $\bar{x} \in X^S$ a $\bar{y} \in Y^S$ jsou rovnovážné strategie smíšeného rozšíření hry s maticí A . Pro tyto strategie platí nerovnosti (3.10). Je-li E maticí typu (m, n) složená ze samých jedniček, je $x^T E y = 1$. K levému členu v (3.10) můžeme přičíst číslo c zapsané ve tvaru $c x^T E y$, k prostřednímu členu v (3.10) přičteme c ve tvaru $c \bar{x}^T E \bar{y}$ a obdobně k pravému členu přičteme c ve tvaru $c \bar{x}^T E y$. Po úpravě dostaneme:

$$x^T (A + cE) \bar{y} \leq \bar{x}^T (A + cE) \bar{y} \leq \bar{x}^T (A + cE) y. \quad (3.11)$$

Tyto nerovnosti jsou obdobou nerovností (3.10) pro matici $A + cE$. Jsou tedy \bar{x} a \bar{y} také rovnovážnými strategiemi ve hře s maticí $A + cE$.

Tvrzení věty 3.3 je velmi názorné: hry s maticí A a s maticí $A + cE$ se liší jen v tom, že v druhém případě hráči po skončení konfliktu dostanou nebo zaplatí částku c a to bez ohledu na to, jaké strategie zvolili. Tato pevná částka nemá vliv na strategické úvahy. Potom jistě existuje kladné číslo v tak, že pro libovolné pevné $\bar{x} \in X^S$ a všechna $y \in Y^S$ platí

$$v \leq \bar{x}^T Ay. \tag{3.12}$$

Funkce $f(y) = \bar{x}^T Ay$ je všude v Y^S spojitá a kladná a Y^S je pevná množina. K tomu, aby nerovnost (3.12) platila pro všechna $y \in Y^S$, stačí, aby platila pro všechna $\bar{y} \in Y^S$ tvaru $[1, 0, \dots, 0]$, $[0, 1, \dots, 0]$, \dots , $[0, 0, \dots, 1]$, tj. pro ryzí strategie. Abychom to ověřili, stačí provést lineární kombinaci nerovností, které vzniknou, když do (3.12) dosadíme uvedené ryzí strategie, a koeficienty y_1, y_2, \dots, y_n :

$$a_{11}\bar{x}_1 + a_{21}\bar{x}_2 + \dots + a_{m1}\bar{x}_m \geq v(y = [1,0,\dots,0]),$$

.....

$$a_{1n}\bar{x}_1 + a_{2n}\bar{x}_2 + \dots + a_{mn}\bar{x}_m \geq v(y = [0,0,\dots,1]). \tag{3.13}$$

Vektor x bude optimální strategií hráče 1 a v bude cenou hry, jestliže bude platit současně (3.13) a

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m = 1, \quad \bar{x} \geq 0, \tag{3.14}$$

a jestliže se podaří určit \bar{y} tak, aby pro všechna $x \in X^S$ platila i druhá část podmínek (3.10) tj.

$$x^T A\bar{y} \leq v. \tag{3.15}$$

Nerovnost (3.14) bude platit, jestliže budou platit podmínky obdobné k (3.13), získané opět dosazením ryzích strategií $x \in X^S$ do (3.15):

$$a_{11}\bar{y}_1 + a_{12}\bar{y}_2 + \dots + a_{1n}\bar{y}_n \leq v(x = [1,0,\dots,0]),$$

.....

$$a_{m1}\bar{y}_1 + a_{m2}\bar{y}_2 + \dots + a_{mn}\bar{y}_n \leq v(x = [0,0,\dots,1]). \tag{3.16}$$

Aby y byla strategie, musí platit i

$$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n = 1, \quad \bar{y} \geq 0. \tag{3.17}$$

V uvedené soustavě je nepříjemné, že neznámá v se vyskytuje na druhé straně nerovností než zbývající neznámé. To odstraníme tím, že zavedeme nové nezáporné proměnné vztahy

$$p_i = \bar{x}_i / v, \quad q_j = \bar{y}_j / v \tag{3.18}$$

$(i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$. Pak můžeme podmínky (3.13) a (3.16) přepsat jako

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq 1,$$

.....

$$a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq 1, \quad (3.19)$$

a

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \leq 1,$$

.....

$$a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_n \leq 1. \quad (3.20)$$

Nahlížejme nyní na (3.19) jako na omezení úlohy lineárního programování, která má účelovou funkci

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m \quad (= 1/v), \quad (3.21)$$

kteřou máme minimalizovat. Na nerovnost (3.20) nahlížejme jako na omezení úlohy k (3.19), (3.21) duální. Aby šlo o úlohu duální, musí k ní příslušet účelová funkce tvaru

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n \quad (= 1/v) \quad (3.22)$$

A tuto funkci je třeba maximalizovat. Protože všechny prvky matice A jsou kladné, je zřejmé, že obě úlohy mají přípustné strategie, a tedy i optimální strategie. Je také vidět, že společná hodnota výplatních funkcí duálních úloh není 0, neboť $p_1 = p_2 = \dots = p_m = 0$ není přípustné pro (3.19).

Vyřešíme-li dříve zmíněné úlohy lineárního programování, nalezneme to, co je zapotřebí: Stačí za v vzít převrácenou společnou optimální hodnotu výplatní funkce a \bar{x}_i a \bar{y}_j vypočítat ze vztahů (3.18). V případě, že matice hry má sedlový prvek, musíme ovšem dostat strategie ve tvaru $[0, 0, \dots, 1, \dots, 0]$. [2]

3.3.1 Simplexová tabulka

Pro řešení úloh lineárního programování se nejčastěji používá simplexová metoda. Simplexová metoda existuje v různých úpravách založených na stejné myšlence. Myšlenka spočívá v tom, že vyjdeme ze základního řešení soustavy a postupujeme vždy k sousedním

základním řešením tak, aby stále rostla hodnota účelové funkce. Pokud sousední základní řešení mají hodnoty účelové funkce nižší nebo stejné, indikuje to, že jsme našli bod maxima účelové funkce. Simplexová metoda se nejčastěji vykládá jako upravená Gaussova-Jordanova eliminační metoda pro řešení soustav lineárních rovnic. [3]

Pro řešení pomocí tužky a papíru se výpočet uspořádá do tabulky, aby nebylo nutné přepisovat názvy proměnných.

Úlohu lineárního programování, kterou budeme řešit, zapisujeme ve tvaru

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (3.23)$$

při podmínkách

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Při numerickém řešení se úloha (3.23), (3.24) upravuje přidáním přídatných proměnných $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ tak, aby omezující podmínky měly tvar soustavy rovnic a podmínek nezápornosti a jinak byly evidentním způsobem s původní soustavou (3.24) ekvivalentní:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2, \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Pro soustavu (3.25) hledáme takové řešení $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$, kde složka x_0 je maximální a ostatní složky jsou nezáporné. Jedno řešení soustavy (3.25) můžeme získat snadno bez počítání tím, že dosadíme $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. Potom ovšem bude $x_0 = 0$, což obecně není

největší možná hodnota x_0 . Abychom x_0 maximalizovali, musíme se snažit vyeliminovat jiné proměnné než ty, které jsou vyeliminovány hned na počátku v soustavě (3.25).

Budeme postupovat tak, že najdeme nejdříve *klíčový sloupec*, tj. sloupec, v němž bude ležet klíčový prvek. Vybereme za něj ten sloupec, který má v poslední rovnici nejmenší záporný koeficient. Na tabulce 3.1 jsou poslední rovnice označeny žlutě.

Dále budeme hledat *klíčový řádek*. Vydělíme pravé strany omezení (zelená barva v tabulce 3.1) kladnými prvky vybraného klíčového sloupce a za klíčový vybereme ten, jemuž přísluší nejmenší podíl. Touto volbou klíčového řádku zajišťujeme, že se na pravých stranách soustavy (3.25) nikdy neobjeví záporné číslo, a tedy i v následujícím kroku dostaneme řešení vyhovující podmínkám nezápornosti kladeným na proměnné.

Za *klíčový prvek* vybereme potom ten, který leží na průsečíku klíčového sloupce a klíčového řádku. V tabulce 3.1 je každý klíčový prvek tučně. Dovolnými úpravami soustavy rovnic potom získáme na místě klíčového prvku koeficient 1 a pod klíčovým prvkem a nad ním koeficienty 0. V takto transformované soustavě rovnic se mezi vyeliminované proměnné zařadí některá z proměnných x_1, \dots, x_n . Na transformovanou soustavu použijeme nyní stejného postupu jako na soustavu původní. To opakujeme tak dlouho, dokud existují v poslední rovnici nějaké záporné koeficienty.

Pokud v této rovnici již žádné koeficienty nejsou, je konečné soustavy rovnic již hledané řešení úlohy lineárního programování přímo patrné: Hodnoty vyeliminovaných proměnných přečteme na pravých stranách rovnic, když předtím za vyeliminované proměnné dosadíme nuly. Naznačeno v tabulce šedou barvou. Takto získáme hodnoty všech proměnných ze soustavy (3.25). Optimální strategie je potom popsána složkami x_1, \dots, x_n , zatímco složka x_0 (hodnota je v tabulce označena červeně) udává maximální hodnotu výplatní funkce. [1]

Výpočet si ukážeme pomocí příkladu:

Uvažujme hru s maticí (3.8). Tato hra nemá řešení v ryzích strategiích, a musíme proto vyšetřovat její smíšené rozšíření. Pro výpočet potřebujeme, aby byli všechny prvky matice hry kladné. Připočteme proto ke každému prvku matice stejnou kladnou konstantu, např. $c = 3$. Tím již dostaneme matici s požadovanými vlastnostmi., jejíž optimální strategie jsou stejné jako u hry s původní maticí. Budeme tedy pracovat s maticí

$$\begin{bmatrix} 3 & 1/2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Z duálních úloh lineárního programování budeme řešit pochopitelně jen jednu, a to tu, jejíž omezení mají tvar (3.20). Pro náš případ dostaneme tuto úlohu

$$\text{Maximalizovat } q_0 = q_1 + q_2 + q_3$$

při omezeních

$$3q_1 + q_2/2 + q_3 \leq 1,$$

$$2q_1 + 6q_2 + 4q_3 \leq 1$$

$$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 \geq 0.$$

Postupem popsaným o pár řádků výše najdeme řešení uvedené úlohy lineárního programování. Výpočet je uveden v Tab. 3.1.

q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	
3	1/2	1	1	0	1
2	6	4	0	1	1
-1	-1	-1	0	0	0
1	1/6	1/3	1/3	0	1/3
0	17/3	10/3	-2/3	1	1/3
0	-5/6	-2/3	1/3	0	1/3
1	0	4/17	6/17	-1/34	11/34
0	1	10/17	-2/17	3/17	1/17
0	0	-3/17	4/17	5/34	13/34
1	-2/5	0	2/5	-1/10	3/10
0	17/10	1	-1/5	3/10	1/10
0	3/10	0	1/5	1/5	2/5

Tab. (3.1)

Řešením této úlohy je

$$q_1 = 3/10, q_2 = 0, q_3 = 1/10, q_4 = 0, q_5 = 0.$$

Duální úloha má řešení

$$p_1 = 1/5, p_2 = 1/5.$$

Optimální hodnota výplatní funkce má hodnotu $2/5 = 1/v$. Pro obě řešení. S použitím vzorců (3.18) dostáváme optimální strategie hráče 1

$$\bar{x}_1 = 1/2, \bar{x}_2 = 1/2$$

a optimální strategie hráče 2

$$\bar{y}_1 = 3/4, \bar{y}_2 = 0, \bar{y}_3 = 1/4.$$

Cena smíšeného rozšíření hry s původní maticí (3.8) je potom $5/2 - 3 = -1/2$.

V konfliktní situaci, jejímž matematickým modelem je smíšené rozšíření hry s maticí (3.8), tedy účastníci tedy optimálně rozhodují takto: První účastník koná před rozhodnutím náhodný pokus, jehož výsledkem je s pravděpodobností $1/2$ číslo 1 a se stejnou pravděpodobností číslo 2. Druhý účastník koná před rozhodnutím náhodný pokus, jehož výsledkem je s pravděpodobností $3/4$ číslo 1, s pravděpodobností 0 číslo 2 a s pravděpodobností $1/4$ číslo 3, a své rozhodnutí volí opět podle výsledku tohoto náhodného pokusu.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

4 PŘÍKLADY

V této kapitole si na příkladech názorně ukážeme, jak aplikovat teorii her do reálných situací.

4.1 Hra v normálním tvaru

Zadání: Dva hráči hrají hru. Hráč číslo 1 volí číslo z intervalu $\langle 0,100 \rangle$ a hráč číslo 2 volí číslo z intervalu $\langle 20,80 \rangle$ nezávisle na hráči 1. Po zveřejnění voleb hráč 1 dostane od hráče 2 či odevzdá hráči 2 částku rovnou rozdílu zvolených čísel. Zapište model této jednoduché salónní hry. A odhadněte optimální strategii.

Řešení: Model této hry je hra v normálním tvaru

$$\{ \{1,2\}; \langle 0,100 \rangle, \langle 20,80 \rangle; M_1(x) = x_1 - x_2, M_2(x) = -x_1 + x_2 \} \quad (4.1)$$

Optimální strategie pro hráče 1 je $\bar{x}_1 = 100$ a pro hráče 2 je optimální strategie $\bar{x}_2 = 80$. Hráč 2 tedy musí zaplatit hráči 1 každou hru částku 20. Kdo se odchýlí, zhorší svůj výsledek.

4.2 Hra ve tvaru charakteristické funkce

Zadání: Uvažujme situaci, v níž se vybírá tým pro projekt Evropské unie. Tým bude muset komunikovat v anglickém, německém, francouzském a ruském jazyce. Do výběrového řízení se přihlásilo celkem pět uchazečů. Uchazeč 1 ovládá anglický a francouzský jazyk. Uchazeč 2 pouze ruský. Uchazeč 3 německý a ruský. Uchazeč 4 anglický a německý a uchazeč 5 francouzský. Tým získá částku 100. Vypište nejmenší možné koalice, které mají šanci získat projekt. Vypočítejte, kolik koalic nemá šanci získat projekt.

Řešení: Maximální počet koalic je $2^5 - 1 = 31$. Nejmenší možné koalice, které mají šanci na úspěch

$$v(\{1,3\}) = v(\{1,2,4\}) = v(\{2,4,5\}) = v(\{3,4,5\}) = 100. \quad (4.2)$$

Koalice, které mají také šanci na úspěch, ale jsou nepraktické

$$v(\{1,2,3\}) = v(\{1,3,4\}) = v(\{1,3,5\}) = v(\{1,2,3,4\}) = v(\{1,2,4,5\}) = v(\{2,3,4,5\}) = v(\{1,3,4,5\}) =$$

$$= v(\{1,2,3,4,5\}) = 100. \quad (4.3)$$

Počet koalic, které nemají šanci na zisk projektu i výhry je roven rozdílu celkového počtu koalic a počtu koalic, které mají šanci na úspěch. Počet neúspěšných koalic je roven 19 (31-12).

4.3 Maticová hra

4.3.1 Ryzí strategie

4.3.1.1 Petr a Hynek

Zadání: Petr a Hynek hrají karetní hru. Petr má v ruce karty tři (dvojku, sedmičku a devítku) a Hynek má v ruce dvě karty (trojku a osmičku). Oba hráči ukáží současně jednu kartu. Ten hráč, který ukáže vyšší kartu, získává od druhého hráče takovou sumu, jaká je hodnota karty s menším číslem. Napište hru jako maticovou, určete optimální strategie obou hráčů a určete cenu hry.

Řešení: Jde o klasický konečný antagonistický konflikt. Na obrázku (4.1) je zápis hry ve tvaru matice pro prvního hráče.

$$\begin{array}{cc}
 & \text{Hynek} \\
 & \begin{array}{cc} 3 & 8 \end{array} \\
 \text{Petr} & \begin{array}{c} 2 \\ 7 \\ 9 \end{array} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & -7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Obr. (4.1)

Optimální strategie pro Petra je třetí řádek, tedy hrát devítkou. Pokud chce Hynek hrát co nejoptimálněji, bude volit první sloupec, tedy kartu s trojkou. Průsečík těchto dvou strategií je sedlový prvek matice, který nám udává i cenu hry. V tomto případě je cena hry rovna 3.

4.3.1.2 Tradiční turnaj

Zadání: Každý pátek se v místní vesnici pořádá tradiční turnaj mezi Horní a Dolní vískou. V turnaji se vždy utká jen jeden tým z každé vísky. Hornáci mají k dispozici tři týmy. Modrý tým má pět členů, zelený tým (tři členy) a žlutý tým, který má jednoho člena. Dolňáci mají týmy také tři. Tým A má čtyři členy, B jich má sedm a C dva. Vyhrává ta víska, která do turnaje pošle početnější tým a získává tolik sudů piva, kolik členů poraženého týmu mají zbylé dva týmy, které se turnaje nezúčastnili. Sestavte matici, která určí rozdělení výher pro obě vísky. A určete optimální strategii Horní i Dolní vísky.

Řešení: Jedná se o konečný antagonistický konflikt dvou hráčů. Na obrázku (4.2) je tvar maticové hry pro Dolní vísku.

$$\begin{array}{c}
 \text{Dolní} \\
 \begin{array}{c} 5 \\ 3 \\ 1 \end{array}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{c}
 \text{Horní} \\
 \begin{array}{ccc} 4 & 7 & 2 \\
 9 & -4 & 11 \\
 -6 & -6 & 6 \\
 -8 & -8 & -8 \end{array}
 \end{array} \right]$$

Obr. (4.2)

Optimální strategie Dolňáků je poslat do turnaje vždy modrý tým (5 členů). Pro Hornáky je nejlepší strategií poslat do hry vždy tým B, který má sedm členů. Průsečík těchto dvou strategií je sedlový prvek, který má určuje cenu hry. V tomto případě je sedlový prvek roven -4. Hornáci tedy každý pátek obdrží od soupeřů 4 sudy piva.

4.3.1.3 Vězňovo dilema

Příklad pouze k zamyšlení: Strážníci zadrželi dva podezřelé z bankovní loupeže. Má ovšem málo důkazů a musí tedy spoléhat přiznání nebo udání. V případě doznání se obou dvou jim hrozí menší trest na pět let. Pokud se nepřizná ani jeden, tak za mříže půjdou pouze na půl roku za rozbití sejfu. Pokud se ale přizná pouze jeden z nich a druhý nikoliv, přiznavší půjde sedět na deset let a druhý bude volný. Jaká strategie je pro hráče nejvýhodnější?

Komentář: Z pohledu optimální strategie by bylo pro oba lupiče mlčet. Ovšem jistou roli zde hrají i psychologické úvahy. Pokud totiž jeden lupič zradí, má šanci uniknout trestu

zcela. Tento případ neřešíme, slouží nám ale jako názorná ukázka toho, že ne každý inteligentní hráč jedná optimálně.

4.3.2 Smíšené strategie

4.3.2.1 Příklad

Zadání: Pomocí simplexové metody řešte hru dvou hráčů s konstantním součtem, když je daná matice výplat prvního hráče na obr. (4.3). Určete optimální strategie hráčů a cenu hry.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Obr. (4.3)

Řešení: Jak vidíme, tak matice nemá sedlový prvek. Matici budeme řešit pomocí lineárního programování. Začneme tím, že k prvkům matice přičteme konst. = 3, aby neměla záporné prvky. Dostáváme tím matici na obr. (4.4).

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Obr. (4.4)

Zapíšeme matici jako úlohu lineárního programování

$$5q_1 + 4q_2 + 7q_3 \leq 1$$

$$4q_1 + 6q_2 + q_3 \leq 1 \tag{4.4}$$

$$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 \geq 0$$

$$q_1 + q_2 + q_3 \rightarrow \max$$

Výpočet úlohy je v následující tabulce

q_1	q_2	q_3	q_1'	q_2'	
5	4	7	1	0	1
4	6	1	0	1	1
-1	-1	-1	0	0	0
1	4/5	7/5	1/5	0	1/5
0	16/5	-23/5	-4/5	1	1/5
0	-1/5	2/5	1/5	0	1/5
1	0	41/20	2/5	-1/4	3/20
0	1	-23/16	-1/4	5/16	1/16
0	0	9/80	3/20	1/16	17/80

Tab. (4.1)

Z tab. (4.1) odečteme toto řešení úlohy (4.4)

$$q_1 = \frac{3}{20}, q_2 = \frac{1}{16}, q_3 = 0,$$

optimální hodnota účelové funkce je $\frac{17}{80}$.

Duální úloha k (4.4) je

$$p_1 = \frac{3}{20}, p_2 = \frac{1}{16}.$$

Optimální hodnota účelové funkce je taktéž $\frac{17}{80}$.

Nyní použijeme upravené vzorce (3.18) pro výpočet rovnovážných strategií

$$\bar{x}_i = \frac{p_i}{1/v} \quad \text{a} \quad \bar{y}_j = \frac{q_j}{1/v}$$

($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) s tím, že $1/v$ je vypočítaná optimální hodnota účelové funkce. Rovnovážné strategie jsou rovny

$$\bar{x}_1 = \frac{12}{17}, \bar{x}_2 = \frac{5}{17}, \bar{x}_3 = 0,$$

$$\bar{y}_1 = \frac{12}{17}, \bar{y}_2 = \frac{5}{17}.$$

Cena hry je rovna $\frac{17}{80} - 3 = 1\frac{12}{17}$.

ZÁVĚR

V práci jsem se snažil srozumitelně objasnit matematický aparát potřebný vůbec ke studiu her. Dále jsem se věnoval popisu a definici konfliktů v teorii her. Jak se dají různě zapisovat hry.

Zvláštní odstavec je věnován maticovým hrám, na kterých je postavené lineární programování a metoda simplexové tabulky. Tyto metody jsou rozvíjeny samostatně a je jim věnována dostatečná pozornost.

V praktické části jsou příklady k procvičení naučené látky. Snažil jsem se, aby příklady byli středně obtížné. Jsou spíše na pochopení látky a k názorným příkladům.

Součástí práce je i prezentace v MS PowerPoint. Tato práce je pouze v elektronické podobě. V práci jsou příklady z praktické části. Prezentace je určena jako učební pomůcka k teorii her.

Myslím, že čtenář by neměl mít problém s pochopením učiva.

ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

At work I have tried to clearly explain the mathematical machinery needed to study theory of games at all. In addition, I spent a description and definition of conflict in the theory of games. How can write the game differently.

Special paragraph is devoted to matrix games on which it is built the linear programming and simplex method. These methods are being developed separately and are given enough attention.

In the practical part of the work are examples of learned compounds. I tried to be examples no high level. They are rather to understand the substance and illustrative examples.

Part of this work is the presentation in MS PowerPoint. This work is only in electronic form. There are examples of the practical part. The presentation is intended as a classroom aid to the theory of games. I think the reader should not have a problem with understanding the curriculum.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] KOŘENÁŘ, Václav, LAGOVÁ Milada. Optimalizační metody. 1. vyd. Praha: Academia, 2003. 187 s. ISBN 80-245-0609-2.
- [2] MAŇAS, Miroslav. Teorie her a optimální rozhodování. Praha: SNTL, 1974. 256 s.
- [3] PELIŠ, Michal. Teorie hej jako formální teorie racionálního rozhodování. ŠUBRT, Jiří. Soudobá sociologie II. Teorie sociálního jednání a sociální struktury. Praha: Karolinum, 2008. 255 – 276 s. Dostupný z WWW: [http://web.ff.cuni.cz/apelis/publ.htm] ISBN 978-80-246-14.
- [4] Teorie her [online]. [2003], 10.12.2008 [cit.2009-03-01]. Dostupný z WWW: [http://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_her]
- [5] MAŇAS, Miroslav. Teorie her a její aplikace. Praha: SNTL, 1991. 280 s.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

Obr. Obrázek

Tab. Tabulka

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. (2.1) – ukázka zápisu hry v explicitním tvaru

Obr. (4.1) – maticová hra pro příklad Petr a Hynek

Obr. (4.2) – maticová hra pro příklad Tradiční turnaj

Obr. (4.3) – zadání maticové hry pro Příklad

Obr. (4.4) – upravená maticová hra pro Příklad

SEZNAM TABULEK

Tab. (3.1) – simplexová tabulka (názorně)

Tab. (4.1) – simplexová tabulka (příklad)

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha je pouze jedna a to v elektronické podobě. Vytvořená v programu MS PowerPoint s názvem Teorie her.