

Užití morfologických metod při přenosu signálu

Using of Mathematical Morphology in Signal Processing

Bc. Jiří Pobořil

Diplomová práce
2014



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Jiří Pobořil**
Osobní číslo: **A12425**
Studijní program: **N3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Počítačové a komunikační systémy**
Forma studia: **prezenční**

Téma práce: **Užití morfologických metod při přenosu signálu**
Téma anglicky: **Using Mathematical Morphology in Signal Processing**

Zásady pro vypracování:

1. Zpracujte literární rešerši na téma využívání matematické morfologie pro zpracování obrazů a signálů.
2. V teoretické části zpracujte přehledně základní pojmy a tvrzení teorie uspořádaných množin a teorie svazů.
3. Uvedte definice a základní vlastnosti operátorů na uspořádaných množinách, které se využívají v matematické morfologii.
4. V praktické části zpracujte přehledně základy formální konceptuální analýzy a uveďte konkrétní příklady kontextů a jejich konceptuálních svazů z dané oblasti.
5. Metodami formální konceptuální analýzy proveďte rozbor morfologického zpracování obrazů a signálů a analýzu jejich konceptuálních svazů.

Rozsah diplomové práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

1. SERRA, J. Image analysis and mathematical morphology. Vol. 1 (Academic Press, 1982).
2. SERRA, J. Image analysis and mathematical morphology. Vol 2 (academic Press, 1988).
3. SERRA, J. Introduction to mathematical morphology, Comput. Vis., Graph. Image Proc., 1986, 35, pp. 283-305.
4. BANGHAM, J. A, MARSHALL, S. Image nad signal processing with mathematical morphology, Electronics Communication Engineering Journal, June 1998.
5. KOPKA, Jan. Svazy a booleovy algebry. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, 1991. 244 s. ISBN 80-7044-025-2.
6. BĚLOHLÁVEK, Radim. Konceptuální svazy a formální konceptuální analýza [online]. Icit. 2014-02-06]. Dostupný z WWW: http://belohlavek.inf.upol.cz/publications/Bel_Ksfka.pdf.
7. HARZHEIM, By Egbert. Ordered sets. New York: Springer, 2005. ISBN 978-038-7242-224.
8. RAMKUMAR, P. B. Fault Analysis Using Mathematical Morphology and Fractal Geometry. International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering [online]. Icit. 2014-02-06]. Dostupné z: www.ijetae.com.

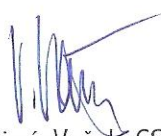
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jiří Klimeš, CSc.

Ústav matematiky

Datum zadání diplomové práce: 7. února 2014

Termín odevzdání diplomové práce: 27. května 2014

Ve Zlíně dne 7. února 2014


prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan




prof. Ing. Karel Vlček, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Cílem této diplomové práce je využití metod matematické morfologie při přenosu signálu. Práce je rozdělena do dvou částí. Teoretická část se zabývá morfologickými pojmy a morfologií zvuku. Poté je uveden stručný přehled pojmů teorie svazů. Na závěr teoretické části jsou rozebrány jednotlivé morfologické operace.

V praktické části diplomové práce jsou uvedeny základy formální konceptuální analýzy, jež je dále aplikována na morfologické operace. Dále je v praktické části provedena morfologie obrazů, která využívá popisné logiky, formální konceptuální analýzy a matematické morfologie úplných svazů. V samotném závěru je provedena aplikace matematické morfologie na obraz mozku.

Klíčová slova: Matematická morfologie, morfologické operace, formální konceptuální analýza, teorie svazů, formální koncept, formální kontext, konceptuální svaz.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to use methods of mathematical morphology for signal transfer. The thesis is divided into two parts. Theoretical part deals with morphological concepts and morphology of sound. Later on, you can find brief overview of the concepts of lattice theory. The end of the theoretical part deals with various morphological operations.

Practical part of the thesis describes basics of formal concept analysis, which is further applied to morphological operations. Later on, it performs morphology of images, which use descriptive logic, formal concept analysis and mathematical morphology of complete lattices. At the end, you can find application of mathematical morphology to the image of brain.

Keywords: Mathematical morphology, morphological operators, formal concept analysis, lattice theory, formal concept, formal context, concept lattice

Rád bych poděkoval vedoucímu mé práce, panu RNDr. Jiřímu Klimešovi, CSc. za odbornou pomoc, cenné rady a připomínky, které vedly k úspěšnému dokončení této práce. Dále bych chtěl poděkovat rodičům a kamarádům za jejich podporu při studiu.

Motto:

„Ničeho se v životě nemusíme bát – jen to pochopit!“

Marie Curie-Sklodovská

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD	9
I TEORETICKÁ ČÁST	10
1 MATEMATICKÁ MORFOLOGIE.....	11
1.1 HISTORIE MATEMATICKÉ MORFOLOGIE	11
1.2 ZÁKLADNÍ MORFOLOGICKÉ POJMY	12
1.2.1 Základní množinové operace	12
1.2.1.1 Sjednocení (union).....	12
1.2.1.2 Průnik (intersection)	13
1.2.1.3 Doplněk (complement)	13
1.2.1.4 Rozdíl (difference).....	13
1.2.1.5 Zrcadlení (reflection)	14
1.2.1.6 Translace (translation)	14
1.2.2 Logické operace	14
1.2.2.1 Pravdivostní tabulky logických operací.....	15
1.3 BINÁRNÍ OBRAZ	15
1.3.1 Morfologická transformace	16
1.3.2 Translace bodové množiny	17
1.3.3 Symetrická bodová množina	17
1.4 ŠEDOTÓNOVÁ MATEMATICKÁ MORFOLOGIE	18
1.4.1 Ekvivalence mezi množinami a funkcemi	18
1.4.2 Vršek množiny	18
1.4.3 Stín množiny	19
1.5 ZVUKOVÁ DETEKCE MATEMATICKOU MORFOLOGIÍ	20
1.5.1 Intenzita průběhu	21
1.5.2 Vnitřní gradient	21
2 ZÁKLADY TEORIE SVAZŮ	23
2.1 POLOSVAZY	23
2.2 HASSEŮV DIAGRAM.....	24
2.3 SVAZY	25
2.4 PODSVAZY	27
2.5 IDEÁLY, FILTRY A HOMOMORFISMY.....	27
2.6 ÚPLNÉ SVAZY	29
2.7 SOUČIN SVAZŮ	31
2.8 MODULÁRNÍ SVAZY.....	31
2.9 DISTRIBUTIVNÍ SVAZY	33
3 ZÁKLADNÍ MORFOLOGICKÉ OPERACE	36

3.1	DILATACE	36
3.2	EROZE	37
3.3	MORFOLOGICKÉ OTEVŘENÍ.....	39
3.4	MORFOLOGICKÉ UZAVŘENÍ.....	39
3.5	HIT-MISS TRANSFORMACE	40
3.6	KOSTRA (SKELET)	41
3.6.1	Algoritmy binární skeletonizace oblastí	42
3.7	MORFOLOGICKÁ EXTRAKCE HRANICE	43
3.8	MORFOLOGICKÉ ZESLABENÍ.....	43
3.9	MORFOLOGICKÉ ZESÍLENÍ.....	44
3.10	GOLAYOVA ABECEDA.....	44
II	PRAKTICKÁ ČÁST	45
4	FORMÁLNÍ KONCEPTUÁLNÍ ANALÝZA	46
4.1	HISTORIE FORMÁLNÍ KONCEPTUÁLNÍ ANALÝZY	46
4.2	ÚVOD DO FORMÁLNÍ KONCEPTUÁLNÍ ANALÝZY	46
4.2.1	Formální koncepty, konceptuální svaz	48
4.3	ZÁKLADNÍ POJMY A DEFINICE FCA	48
4.3.1	Formální kontext, indukované Galoisovy konexe.....	48
4.3.2	Formální koncepty, konceptuální svaz	49
4.3.3	Atributové implikace	53
4.3.4	Vícehodnotové kontexty a konceptuální škalození	54
5	MORFOLOGIE OBRAZŮ POMOCÍ FCA A POPISNÉ LOGIKY.....	56
5.1	ÚVOD	56
5.2	POPISNÁ LOGIKA	58
5.3	ABDUKCE V POPISNÉ LOGICE	61
5.4	POUŽITÍ FCA PRO TVORBU ALGORITMU	63
5.5	UŽITÍ FCA V POPISNÉ LOGICE.....	66
5.6	ABDUKCE OPERÁTORŮ Z MATEMATICKÉ MORFOLOGIE NA ÚPLNÉ SVAZY	68
5.6.1	Eroze z povzdálí a blízkého okolí	69
5.6.2	Poslední neprázdná eroze.....	71
5.6.3	Poslední souladná eroze.....	72
5.6.4	Přímá definice poslední neprázdné eroze	73
5.6.5	Přímá poslední souladná eroze.....	74
5.6.6	Vlastnosti a interpretace.....	75
5.7	INTERPRETACE OBRAZU MOZKU.....	77
5.8	VOLBA MORFOLOGICKÝCH OPERÁTORŮ	81
	ZÁVĚR	82
	ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ.....	83
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	83
	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	87
	SEZNAM OBRÁZKŮ	88
	SEZNAM TABULEK	90

ÚVOD

V dnešní době je matematická morfologie aplikována do různých oblastí. Jedná se například o biologii, materiálový výzkum, geologii, kriminalistiku, obrazovou inspekce v průmyslu, rozpoznávání znaků a dokumentů. Operátory matematické morfologie se obvykle používají tam, kde je požadavek na krátký čas zpracování. Matematická morfologie je poměrně nová oblast, jejíž vznik je datován do druhé poloviny 20. století. Nyní je výzkum oblasti matematické morfologie velmi aktivní.

V této diplomové práci se budeme podrobně zabývat využíváním metod matematické morfologie při přenosu signálu. V první části diplomové práce jsou nejprve popsány základní morfologické pojmy, které jsou aplikované na binární obraz a šedotónovou matematickou morfologii. Dále je provedena aplikace matematické morfologie na zvukovou detekci. Jsou tu také uvedeny základy teorie svazů. V závěru teoretické části jsou popsány základní morfologické operace. Konkrétně se jedná o dilataci, erozi, otevření, uzavření, skelet a mnoho dalších.

V praktické části můžeme nalézt popis formální konceptuální analýzy, která je poté aplikována na morfologické operace, popisnou logiku a na teorii svazů. Formální konceptuální analýza je moderní metoda pro analýzu dat. Jedná se o seskupování zkoumaných objektů podle jejich společných vlastností. Formální konceptuální analýzy se využívá v mnoha odvětvích. Hlavním cílem této metody je její aplikace na technické obory, jako je například umělá inteligence, vyhledávání informací a softwarové inženýrství. V dnešní době je formální konceptuální analýza rozšířena do různých oblastí přírodních věd. Své uplatnění nachází i v medicíně.

V úvodu praktické části můžeme najít popis základních pojmů a definic formální konceptuální analýzy. Konkrétně se jedná o formální kontext, indukované Galoisovy konexe, formální koncepty, konceptuální svaz, atributové implikace, vícehodnotové kontexty a konceptuální škálování. Je tu uvedena i morfologie obrazů pomocí formální konceptuální analýzy. Zde je využito popisné logiky, tvorba algoritmu pomocí formální konceptuální analýzy a operátorů matematické morfologie v úplných svazech. Konkrétně se jedná o morfologické operátory eroze. Na závěr této diplomové práce je provedena aplikace matematické morfologie, popisné logiky a formální konceptuální analýzy na obraz mozku.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 MATEMATICKÁ MORFOLOGIE

Matematická morfologie (MM) je teoretický model opírající se o teorii svazů. Tento model je používán pro předzpracování a segmentaci obrazů. Principy matematické morfologie jsou založeny na nelineárních operacích v obrazu. Nejčastěji je matematická morfologie aplikovaná na digitální obrázky. Ovšem může být použita taky na grafy a různé prostorové konstrukce. MM byla původně vyvinuta pro binární obrázky. Později byla rozšířena do více stupňů šedi až po různé barevné obrázky.

1.1 Historie matematické morfologie

První zmínka o tomto oboru je datována na počátek 20. století, o což se zasloužil svou prací Minkowský. Dále se matematickou morfologií zajímali Dineen, Kirsch, Preston, Moore a Golay.

Vznik matematické morfologie je datován na rok 1964. Za jejím zrozením stáli dva Francouzi Jean Serra a Georges Matheron na akademické půdě École des Mines de Paris ve Fontainebleau. Z počátku matematická morfologie pracuje jen s binárními obrázky. Byly vytvořené binární operátory, jako jsou dilatace, eroze, otevíření, uzavření, skelet, hit-miss transformace, zeslabení, zesílení a mnoho dalších. Většina práce v tomto období vznikala ve Fontainebleau. Náhodný přístup byl vyvinut na základě nových modelů obrazu.

Od poloviny roku 1970 byla matematická morfologie rozšířena do více stupňů šedi. V roce 1986 Jean Serra zobecnil matematickou morfologii do teorie založené na úplných svazech. Toto zobecnění umožnilo použití na mnohem větším počtu struktur. Například na barevných obrázcích, videích, grafech a různých sítích. Dále Matheron a Serra formulovali teorii morfologického filtrování.

Na počátku devadesátých let byla oblast výzkumu matematické morfologie velmi aktivní. Začala se objevovat jako hlavní téma v různých odborných časopisech např. IEEE Transaction on PatternAnalysis and MachineIntelligence nebo IEEE Transactions on Signalprocessing a v mnoha dalších. Následovně byly pro matematickou morfologii založeny odborné konference. V roce 1993 vytvořil Henk Heijmans a PierreSoile komunikační kanál pro lidi zajímající se o matematickou morfologii [8], [11], [23].

1.2 Základní morfologické pojmy

V matematické morfologii je využíváno vlastností bodových množin. Musí se ovšem vycházet z představy, že lze reálné obrázky modelovat pomocí bodových množin libovolné dimenze. To může být například n -rozměrný euklidovský prostor.

1.2.1 Základní množinové operace

Nechť A je množina složená z uspořádaných dvojic, jestliže $A = (a_1, a_2)$ je prvek (element) A , píšeme

$$a \in A.$$

Jestliže a není elementem A

$$a \notin A.$$

Množina neobsahující žádné prvky se nazývá nulová nebo prázdná množina – symbol \emptyset .

Zpracováním obrazu jsou souřadnice pixelů představující oblast obrazu.

Jestliže každý prvek množiny A je také prvkem množiny B , potom A je podmnožinou B

$$A \subseteq B.$$

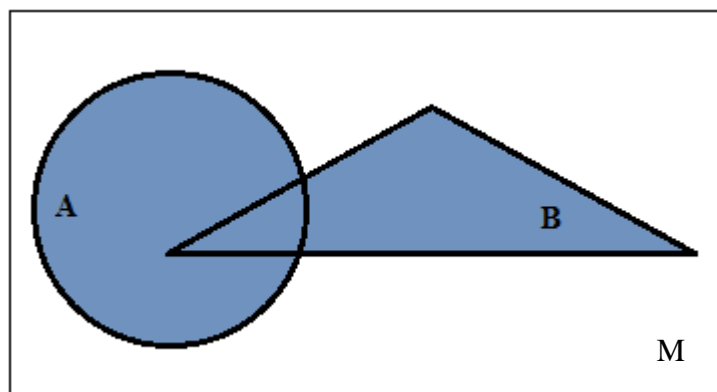
Dvě množiny A a B jsou disjunkční, jestliže nemají společný prvek [16]

$$A \cap B = \emptyset.$$

1.2.1.1 Sjednocení (union)

Je množina elementů patřících buď do A , B nebo obou

$$C = A \cup B.$$

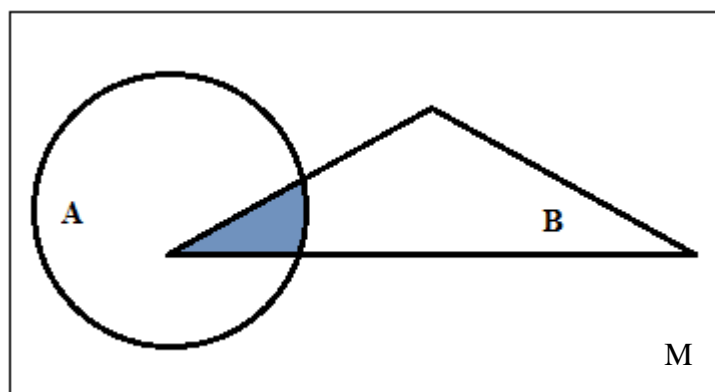


Obr. 1 Sjednocení množiny A, B

1.2.1.2 Průnik (intersection)

Je množina prvků patřících do obou A a B

$$C = A \cap B.$$

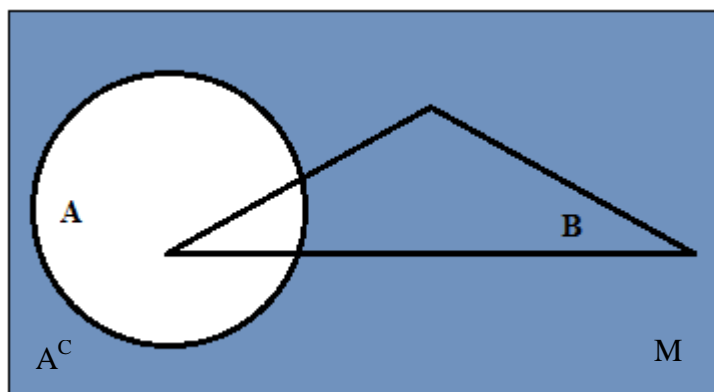


Obr. 2 Průnik množin A, B

1.2.1.3 Doplněk (complement)

Doplněk množiny A je množina prvků, které nejsou v A

$$C = A \cap B.$$



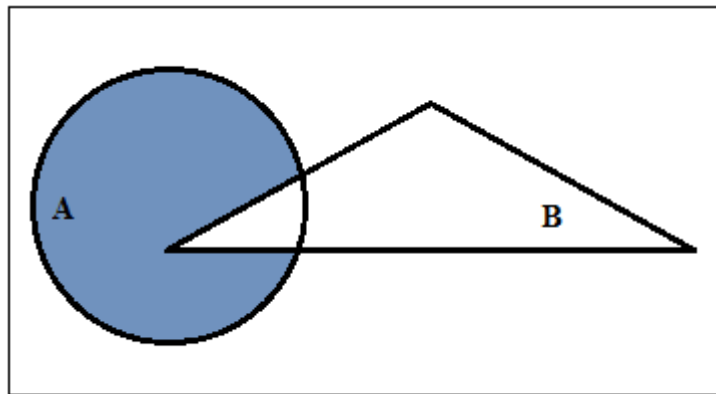
Obr. 3 Doplněk množiny A

1.2.1.4 Rozdíl (difference)

Rozdíl dvou množin A a B , $A - B$

$$A - B = \{w | w \in A, w \notin B\} A \cap B^c.$$

Množina prvků patřících do A , ale ne do B .

Obr. 4 Rozdíl dvou množin $A - B$

1.2.1.5 Zrcadlení (reflection)

Zrcadlení množiny B

$$\hat{B} = \{w | w = -b, b \in B\}.$$

Jestliže B je množina pixelů představujících objekt v obraze, pak \hat{B} je množina bodů v B , jehož souřadnice (x, y) jsou nahrazeny souřadnicemi $(-x, -y)$.

1.2.1.6 Translace (translation)

Translace množiny B bodem $z = (z_1, z_2)$

$$(B)_z = \{c | c = b + z, b \in B\}.$$

Jestliže B je množina pixelů představujících objekt v obraze, pak $(B)_z$ je množina bodů v B , jehož souřadnice (x, y) jsou nahrazeny souřadnicemi $(x + z_1, y + z_2)$ [16].

1.2.2 Logické operace

Logické operace jsou binární obrazy, které jsou vyjádřeny nulami (pozadí) a jedničkami (popředí). Množinové operace vznikají mezi souřadnicemi objektů v binárním obraze.

- $A \cap B = AND$
- $A \cup B = OR$
- $A^c = NOT$
- $A - B = DIFFERENCE$

1.2.2.1 Pravdivostní tabulky logických operací

AND		
Vstup A	Vstup B	Výstup
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR		
Vstup A	Vstup B	Výstup
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NAND		
Vstup A	Vstup B	Výstup
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR		
Vstup A	Vstup B	Výstup
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NOT	
A	A
0	1
1	0

XOR		
Vstup A	Vstup B	Výstup
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

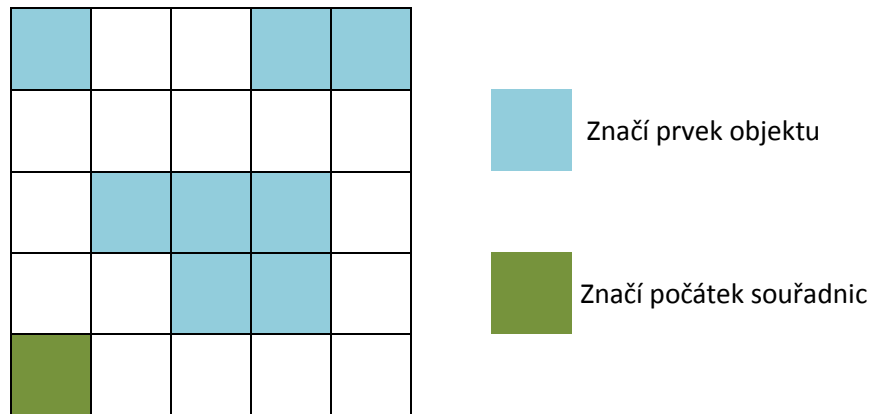
Obr. 5 Pravdivostní tabulky logických operací

1.3 Binární obraz

Základním popisem pro binární matematickou morfologii ve 2D je dvojice celých čísel. Jeden pixel obrázku je tedy reprezentován dvojicí celých čísel. Počátek souřadnicového systému se vždy nachází v bodech (0,0). Pixely s hodnotou jedna reprezentují body množiny X . Ostatní body X^c , tedy body s hodnotou nula, popisují pozadí. Souřadnice bodů (x, y) mají stejný význam, jako je v matematice obvyklé (obr. 6).

$$X = \{(0,4), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,4), (4,4)\}$$

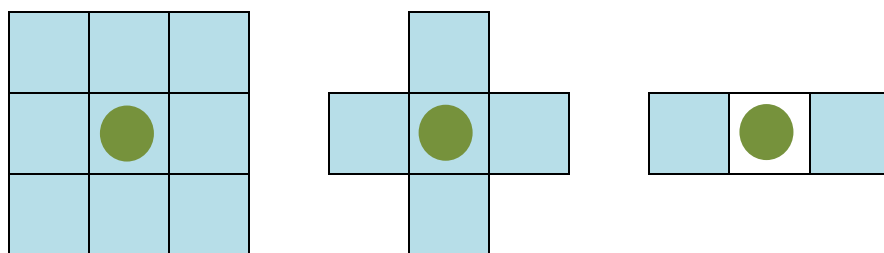
Pro binární matematickou morfologii ve 3D je bodová množina vyjádřena trojicemi celých čísel. U víceúrovňového obrázku, šedotónové matematické morfologie, je základem popisu také trojice celých čísel. Ovšem v tomto případě je jedna z hodnot stupeň šedi příslušného pixelu [5].



Obr. 6 Ukázka pro 2D bodovou množinu

1.3.1 Morfologická transformace

Morfologická transformace je dána relací mezi obrazem (bodová množina X) s jinou bodovou množinou, která je nazývána jako strukturní element B . Strukturní element je vztažen k lokálnímu počátku, jemuž se říká aktuální (reprezentativní) bod. Nežádoucí případ může nastat tehdy, když reprezentativní bod není bodem strukturního elementu. Použitím morfologické transformace získáme nový transformovaný objekt. Transformací nezískáme funkcionální předpis pro popis jedné charakteristiky původního objektu. Cílem této transformace je kvantitativní popis objektů.



Obr. 7 Typické strukturní elementy

Aplikaci morfologické transformace $\Psi(X)$ na obraz X odpovídá systematickému posunu B po obraze. Výsledek transformace v každé poloze odpovídá relaci. Pro binární obrazy je výsledek relace roven 0 nebo 1. Ke každé morfologické transformaci $\Psi(X)$ existuje duální transformace $\Psi^*(X)$

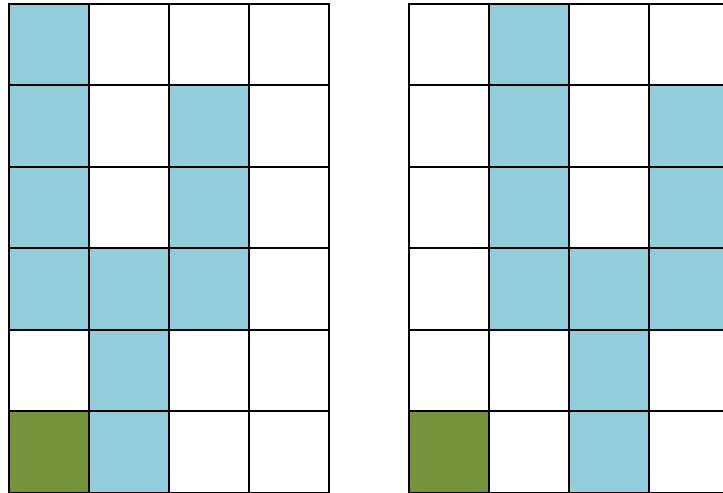
$$\Psi(X) = (\Psi^*(X^c))^c \quad [4], [5].$$

1.3.2 Translace bodové množiny

Translace bodové množiny X o radiusvektor h se označuje X_h . To je dáno vztahem

$$X_h = \{p \in \mathcal{E}^2, p = x + h \text{ pro některá } x \in X\}.$$

Použitou translaci o vektoru $h = (0,1)$ lze vidět na obrázku (Obr. 8) [4], [5].



Obr. 8 Příklad translace o vektor $h = (0,1)$

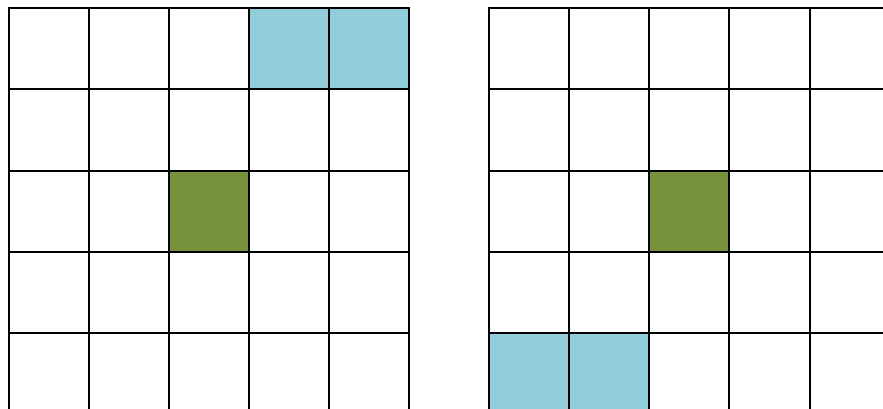
1.3.3 Symetrická bodová množina

Symetrická bodová množina je někdy nazývána jako transponovaná bodová množina

$$\check{D} = -D\{-x: x \in D\}.$$

Příklad transpozice lze vidět na obrázku (Obr. 9).

$$D = \{(1,2), (2,2)\} \quad \check{D} = \{(-1,-2), (-2,-2)\}$$



Obr. 9 Příklad symetrické bodové množiny

V trojrozměrném prostoru je často otočení určeno trojicí Eulerových úhlů $\omega = (\Phi, \vartheta, \phi)$, které definují matici otočení $M = M(\omega)$. Rotace množiny A okolo počátku je dána vztahem:

$$MA = \{Mx : x \in A\}.$$

1.4 Šedotónová matematická morfologie

U šedotónové matematické morfologie se jedná o zobecnění binární morfologie. Jsou to obrázky s více jasovými úrovněmi nebo voxely. Bodová množina $A \in \mathbb{E}^3$. Důležitými pojmy jsou supremum a infimum. Ve výpočtech jsou nahrazeny operacemi minimum a maximum. Pokud se jedná o erozi nebo její duální morfologickou transformaci dilataci obrazu s plochým strukturním elementem, přiřazuje každému pixelu v okolí okamžitého bodu minimální nebo maximální hodnotu. Obecný strukturní element je funkce dvou proměnných. Strukturní element ovlivňuje, jakým způsobem se berou v úvahu hodnoty obrazu v okolí. Hodnota strukturního elementu je přičtena, jestliže se v okolí počítá maximum. Pokud se v okolí počítá minimum, je hodnota strukturního elementu odečtena [5].

1.4.1 Ekvivalence mezi množinami a funkcemi

Na funkci lze nahlížet jako na sebe položené zmenšující se množiny. Každá množina X_λ je průnikem mezi stínem funkce a vodorovnou rovinou

$$X_\lambda = \{x \in \mathbb{E}, f(x) \geq \lambda\}.$$

Ekvivalentně lze říci, že f je shora polospojité nebo, že $\{X_\lambda\}$ je uzavřená množina.

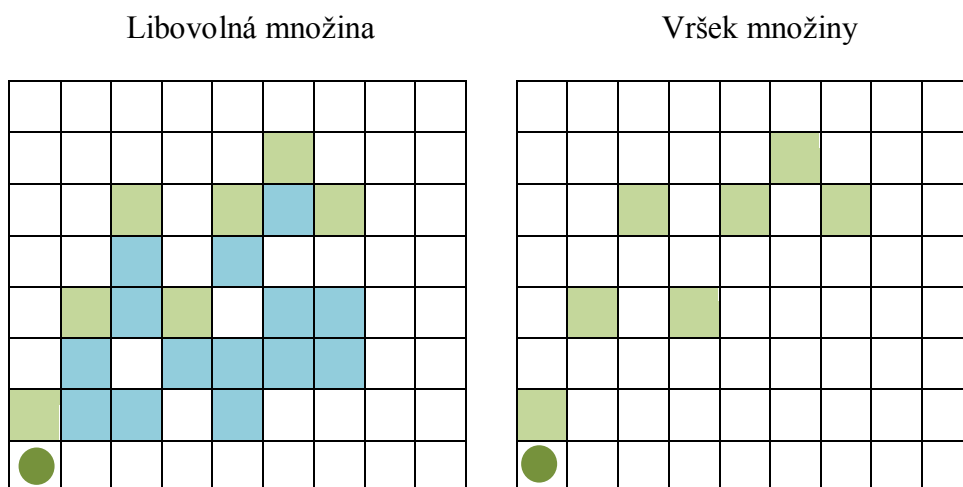
Jsou-li dány množiny $\{X_\lambda\}$ uzavřených množin, kdy $\lambda \geq u \Rightarrow X_\lambda \subseteq X_u$ a $X_\lambda = \bigcap \{X_u, u < \lambda\}$ potom existuje jednoznačná a shora polospojité f , jejímiž řezy jsou množiny $\{X_\lambda\}$ [5].

1.4.2 Vršek množiny

Nechť $A \subseteq \mathbb{E}^n$ a definiční obor $F = \{x \in \mathbb{E}^{n-1} \text{ pro některá } y \in \mathbb{E}, (x, y) \in A\}$.

Vršek množiny A označovaný $T[A]$ je zobrazením $F \rightarrow \mathbb{E}$:

$$T[A](x) = \max\{y, (x, y) \in A\} \quad [5].$$

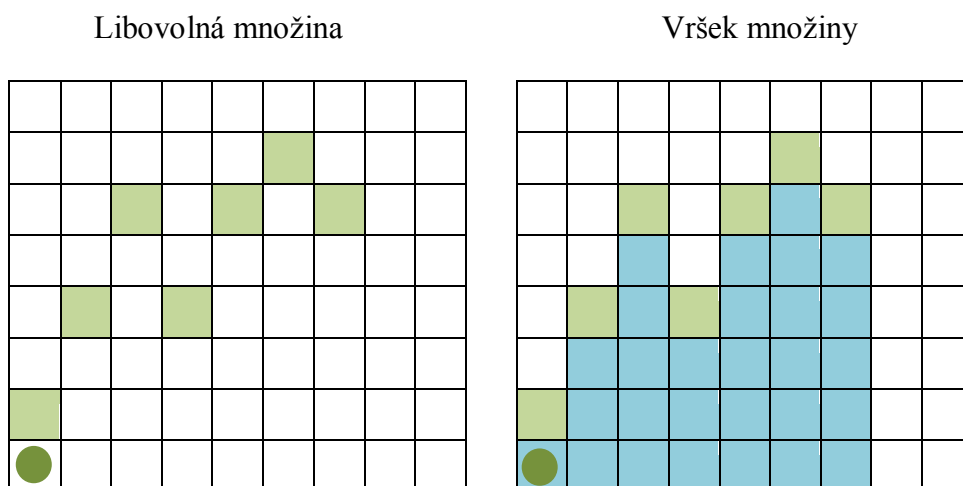


Obr. 10 Vršek množiny

1.4.3 Stín množiny

Nechť $F \subseteq \mathbb{E}^{n-1}$ a $f: F \rightarrow \mathbb{E}$.

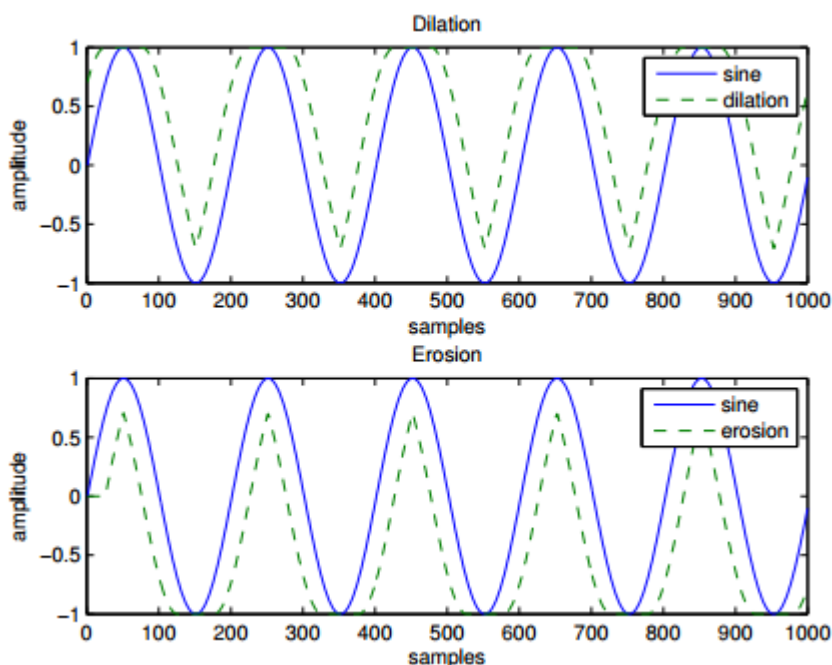
Stín funkce f se označuje $U[f]$, $U[f] \subseteq F \times \mathbb{E}$, $U[f] = \{(x, y) \in F \times \mathbb{E}, y \leq f(x)\}$ [5].



Obr. 11 Stín množiny

1.5 Zvuková detekce matematickou morfologií

I když je matematická morfologie většinou používána pro zpracování obrazů, lze jí aplikovat také pro zpracování zvuků a signálů. Morfologické operace používají strukturní elementy. Můžeme je chápat v jednorozměrných signálech jako posuvný prvek o pevné velikosti. Počítají s lokálním minimem nebo maximem. Minimum odpovídá morfologické operaci erozi a maximum dilataci, což lze vidět na obrázku (Obr. 12), který ukazuje dilataci a erozi v jednorozměrném signálu. Na obrázku si lze všimnout, že tyto operace neberou v potaz polaritu signálu a hodnota amplitudy -1 je považována za minimum.

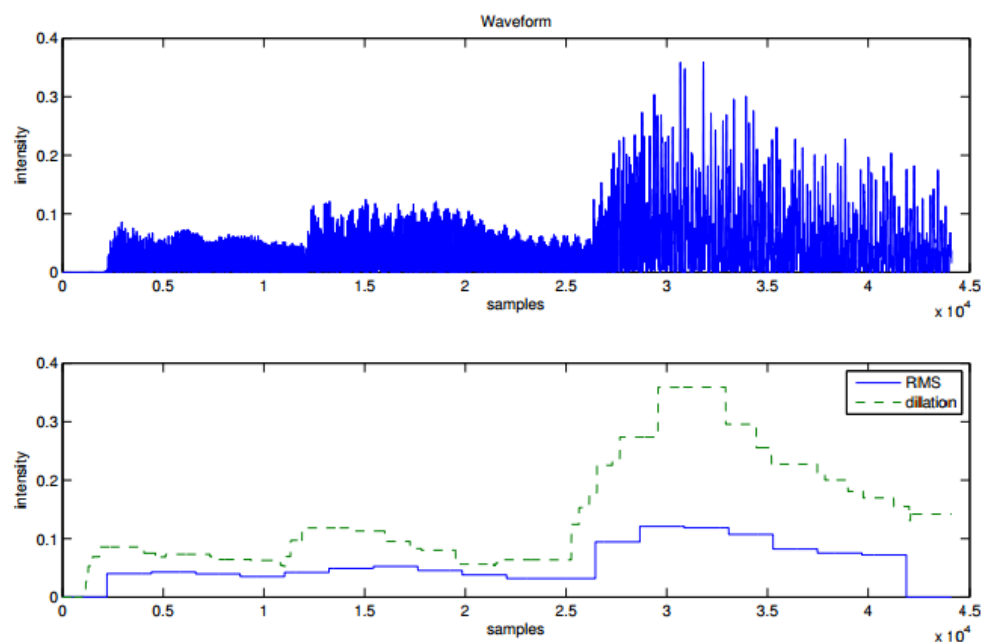


Obr. 12 Porovnání dilatace, eroze na signálu sinus

Morfologické operace mohou být kombinovány k vytvoření filtrů vhodných pro zjištění vrcholů a hran. Morfologická operace otevření, což je eroze následovaná dilatací, může být použita k oddělení vyšší harmonické informace ve filtrech dolní propusti. V navrhovaných zvukových detekčních systémech jsou morfologické operace použity pro zobecnění průběhu a k rychlému nalezení náběžných hran. V následujících jednotlivých podkapitolách jsou popsány potřebné kroky, k nimž patří jednotlivé morfologické operace [14].

1.5.1 Intenzita průběhu

Vzhledem k tomu, že morfologické operace neberou v potaz polaritu signálu, jsou používány k vytvoření grafu intenzity průběhu. Maximální intenzita nad padesát milisekund se vypočítá pomocí dilatace křivky s lineárním strukturním elementem širokým 50ms. Jelikož efektivní hodnota (RMS) by průběh intenzity signálu znehodnotila, používá se dilatace. Zachová větší hrany efektivnějším působením maximální hodnoty na navrhovaný průběh. To lze vidět na obrázku (Obr. 13) [14].

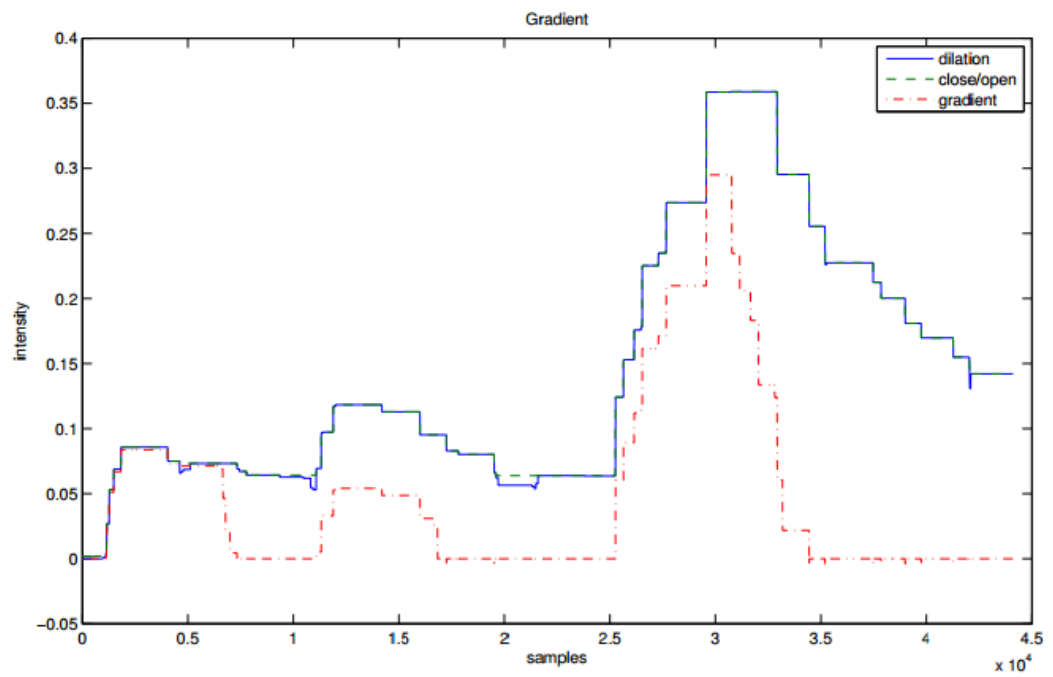


Obr. 13 Porovnání dilatace a RMS

1.5.2 Vnitřní gradient

System vyhledává hrany definované velkými a rychlými přechody z nízké do vysoké intenzity. Morfologický vnitřní gradient vypočteme odečtením eroze od původního signálu

$$G_i(f) = f - f \ominus B$$



Obr. 14 Ukázka vnitřního gradientu křivky [14]

2 ZÁKLADY TEORIE SVAZŮ

Základy teorie svazů patří do oblasti algebry. Zabývá se uspořádanými množinami. Ke každým dvěma prvkům existuje supremum a infimum.

- Supremum – největší prvek
- Infimum – nejmenší prvek

2.1 Polosvazy

Prvek x grupoidu (G, \cdot) se nazývá idempotentní, pokud $x \cdot x = x$.

Komutativní pologrupa, jejíž každý prvek je idempotentní, se nazývá polosvaz.

Podle předchozí definice tedy budeme i prázdný grupoid, který je samozřejmě komutativní i asociativní, považovat za polosvaz.

Příklad. Pro libovolnou množinu X budeme symbolem 2^X označovat množinu všech podmnožin množiny X . Pak $(2^X, \cap)$ a $(2^X, \cup)$ jsou polosvazy.

Příklad. Množina všech přirozených čísel \mathbb{N} spolu s operací největší společný dělitel (resp. nejmenší společný násobek) tvoří polosvaz.

V následující větě použijeme právě provedenou změnu definice grupoidu: grupoidem rozumíme i grupoid na prázdné množině, proto prázdná množina je podgrupoidem libovolného grupoidu. Protože existují komutativní pologrupy, v nichž žádný prvek není idempotentní (například $(\mathbb{N}, +)$), museli bychom bez této změny následující větu formulovat takto:

„Nechť (G, \cdot) je komutativní pologrupa. Pak množina všech idempotentních prvků, je-li neprázdná, tvoří podgrupoid pologrupy (G, \cdot) , jež je polosvazem.“

Věta 1.1. Nechť (G, \cdot) je komutativní pologrupa. Pak množina všech idempotentních prvků tvoří podgrupoid pologrupy (G, \cdot) , který je polosvazem.

Věta 1.2. Nechť (G, \leq) je uspořádaná množina, v níž k libovolným dvěma prvkům $a, b \in G$ existuje supremum $a \vee b$. Pak (G, \leq) je polosvaz. Navíc pro každé $a, b \in G$ platí:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

Věta 1.3. Nechť (G, \cdot) je polosvaz. Potom relace \leq daná vztahem

$$a \leq b \Leftrightarrow a \cdot b = b,$$

pro každé $a, b \in G$ je uspořádání na G , v němž pro každé $a, b \in G$ je $a \cdot b$ supremum množiny $\{a, b\}$ v (G, \leq) .

Z dokázaných vět vyplývá následující:

Polosvazy jsou totéž, co uspořádané množiny, kde ke každým dvěma prvkům existuje supremum.

Princip duality: Necht' (G, \leq) je uspořádaná množina. Definujeme-li na G novou relaci \leq' takto: pro libovolné prvky $a, b \in G$ klademe

$$a \leq' b \Leftrightarrow b \leq a,$$

pak je (G, \leq') opět uspořádaná množina, přičemž supremum v (G, \leq) se stane infimem v (G, \leq') a naopak.

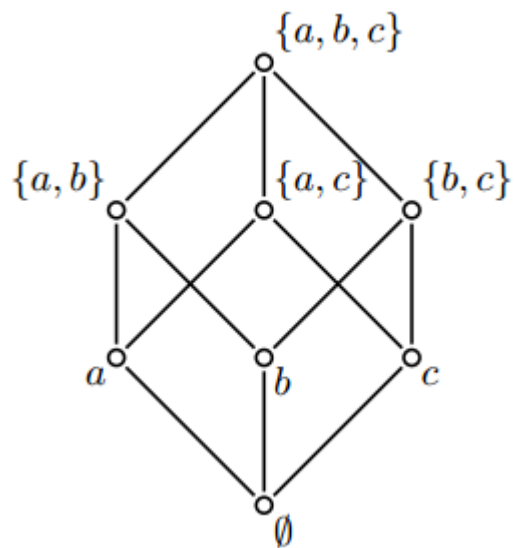
Polosvazy jsou totéž, co uspořádané množiny, kde ke každým dvěma prvkům existuje infimum [1], [15].

2.2 Hasseův diagram

Hasseův diagramu se využívá k zobrazení konečné částečně uspořádané množiny. Hasseův diagram byl pojmenován po Helmetu Hasseovi. Jedná se o orientovaný graf, jehož vrcholy reprezentují jednotlivé prvky částečně uspořádané množiny. Hrany znázorňují relaci pokrytí příslušnou danému uspořádání. Na obrázku (Obr. 15) lze vidět Hasseův diagram pro částečně uspořádanou množinu $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$. Je zde použito algoritmu růstu zdola. Lze si vypsát uspořádání na množině

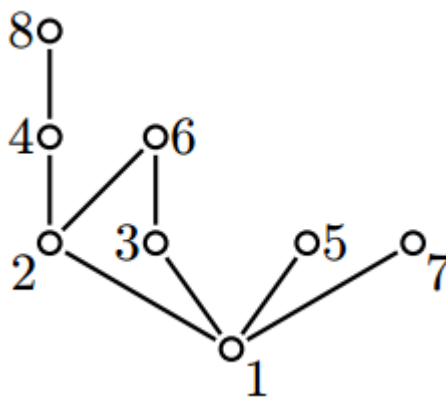
$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

U Hasseova diagramu je větší prvek umístěn výše než menší prvek. Vrcholy je vhodné volit tak, aby nedocházelo ke křížení hran [1], [15], [17].



Obr. 15 Hasseův diagram

Pomocí Hasseůva diagramu lze například nakreslit $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ uspořádané relací dělitelnosti. Je dáno, a dělí b .



Obr. 16 Využití Hasseůva diagramu

2.3 Svazy

Svazem je každá uspořádaná množina (G, \leq) , ve které ke každým dvěma prvkům existuje supremum i infimum. Supremum označujeme $\sup(a, b)$ a infimum označujeme jako $\inf(a, b)$.

Příklad. Každý řetězec (neboli lineárně uspořádaná množina, tj. uspořádaná množina, v níž jsou každé dva prvky srovnatelné) je svaz.

Příklad. Pro libovolnou množinu X je $(2^X, \subseteq)$ svaz.

Věta 2.1. Necht' (G, \leq) je svaz. Pro libovolné prvky $a, b \in G$ označme jejich supremum symbolem $a \vee b$ a jejich infimum symbolem $a \wedge b$. Pak (G, \vee) a (G, \wedge) jsou polosvazy a obě operace jsou spolu svázány tzv. absorpčními zákony: pro každé prvky $a, b \in G$ platí

$$a \vee (b \wedge a) = a \wedge (b \vee a) = a.$$

Kromě toho pro každé prvky $a, b \in L$ platí

$$a \wedge b = a \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

Věta 2.2. Necht' (G, \vee, \wedge) je množina se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, které jsou spolu svázány absorpčními zákony. Pak

1. pro každé prvky $a, b \in G$ platí $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$,
2. definujeme-li na G relaci \leq takto: pro libovolné prvky $a, b \in G$ klademe

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b,$$

pak je \leq uspořádání na G takové, že (G, \leq) je svaz, v němž pro libovolné prvky $a, b \in G$ je prvek $a \vee b$ jejich supremum a prvek $a \wedge b$ jejich infimum.

Z uvedených vět vyplývá, že svazy jsou totéž co algebraické struktury (G, \vee, \wedge) se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, svázanými spolu absorpčními zákony. Proto i tyto struktury (G, \vee, \wedge) budeme nazývat svazy.

Princip duality: Je-li (G, \vee, \wedge) svaz, pak i (G, \wedge, \vee) je svaz. Obecně, jestliže v nějakém platném tvrzení o svazech systematicky zaměníme supremum \leftrightarrow infimum, $\vee \leftrightarrow \wedge$, $\leq \leftrightarrow \geq$ dostaneme opět platné tvrzení o svazech.

Protože není nutné zdůrazňovat, zda máme na mysli svaz jako uspořádanou množinu nebo jako algebraickou strukturu se dvěma operacemi, nebudeme v dalším textu, nebude-li to z určitého důvodu vhodné nebo dokonce nevyhnutelné, uspořádání či operace vyznačovat. Budeme tedy místo o svazu (G, \leq) či svazu (G, \vee, \wedge) jednoduše psát o svazu G .

Věta 2.3. V libovolném svazu G pro každou trojici prvku $a, b, c \in G$ platí tzv. distributivní nerovnosti

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c),$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Je-li navíc $c \leq a$, platí tzv. modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Věta 2.4. Necht' G je svaz, $n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné prvky $a_1, \dots, a_n \in G$ platí, že $a_1 \vee \dots \vee a_n$ je supremum množiny $\{a_1, \dots, a_n\}$ a $a_1 \wedge \dots \wedge a_n$ je infimum množiny $\{a_1, \dots, a_n\}$ [1], [15].

2.4 Podsvazy

Necht' (G, \vee, \wedge) je svaz, A podmnožina jeho nosné množiny G . Řekneme, že A je podsvaz svazu (G, \vee, \wedge) , jestliže je A podgrupoidem grupoidu (G, \wedge) a současně podgrupoidem grupoidu (G, \vee) .

Je tedy $A \subseteq G$ podsvazem svazu G , právě když pro každé $a, b \in A$ platí $a \vee b \in A$ a $a \wedge b \in A$.

Příklad. Každá jednoprvková podmnožina svazu je jeho podsvazem, prázdná množina je podsvazem libovolného svazu, každý svaz je svým podsvazem [1], [15], [17].

2.5 Ideály, filtry a homomorfismy

Necht' G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Řekneme, že A je ideál svazu G , jestliže je A podsvazem svazu G , který navíc splňuje podmínku: pro každé $a \in A$ a každé $x \in G$ platí

$$x \leq a \Rightarrow x \in A.$$

Duálně, řekneme, že A je filtr svazu G , jestliže je A podsvazem svazu G splňujícím navíc splňuje podmínku: pro každé $a \in A$ a každé $x \in G$ platí

$$x \geq a \Rightarrow x \in A.$$

Ideál svazu je tedy podsvaz, jež s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a . Filtr svazu je podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu větší než a .

Příklad. Každý svaz je svým ideálem i filtrem. Prázdná množina je ideálem i filtrem libovolného svazu.

Věta 3.1. Průnik libovolného neprázdného systému podsvazů (resp. ideálů, resp. filtrů) daného svazu je opět podsvaz (resp. ideál, resp. filtr) tohoto svazu.

Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Díky předchozí větě můžeme nyní definovat ideál $A \downarrow$ svazu G generovaný množinou A jako průnik všech ideálů tohoto svazu obsahujících množinu A . Duálně, filtr $A \uparrow$ svazu G generovaný množinou A je průnik všech filtrů tohoto svazu obsahujících množinu A . Je-li $A = \{a\}$, píšeme stručně $a \downarrow$ místo $\{a\} \downarrow$, resp. $a \uparrow$ místo $\{a\} \uparrow$, a hovoříme o hlavním ideálu, resp. o hlavním filtru, generovaném prvkem a .

Pro svaz G a podmnožinu $A \subseteq G$ je ideál $A \downarrow$ generovaný množinou A tím nejmenším (vzhledem k množinové inkluzi) ideálem svazu G ze všech ideálů obsahujících množinu A . Duálně filtr $A \uparrow$ generovaný množinou A je tím nejmenším (vzhledem k množinové inkluzi) filtrem svazu L ze všech filtrů obsahujících množinu A .

Je zřejmé, že podmnožina $A \subseteq G$ je ideálem svazu G , právě když $A \downarrow = A$, a je filtrem svazu G , právě když $A \uparrow = A$.

Věta 3.2. Necht' G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A \downarrow$ generovaný množinou A platí

$$A \downarrow = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N} \exists a_1, \dots, a_n \in A: x \leq a_1 \vee \dots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A \uparrow$ generovaný množinou A platí

$$A \uparrow = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N} \exists a_1, \dots, a_n \in A: x \geq a_1 \wedge \dots \wedge a_n\}.$$

Nechť (G, \leq) , (H, \leq) jsou uspořádané množiny $f: G \rightarrow H$ zobrazení. Řekneme, že je f izotonní zobrazení, jestliže pro každé $a, b \in G$ platí implikace

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

Řekneme, že f je izomorfismus uspořádaných množin, je-li f bijekce a obě zobrazení f i f^{-1} jsou izotonní.

Nechť G a H jsou svazy, $f: G \rightarrow H$ zobrazení. Řekneme, že je f svazový homomorfismus, jestliže pro každé $a, b \in L$ platí

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \quad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b).$$

Řekneme, že f je svazový izomorfismus (neboli izomorfismus svazů), je-li f bijektivní homomorfismus.

Protože každý svaz je také uspořádaná množina, má smysl se ptát, zda svazový homomorfismus je též izotonní zobrazení.

Věta 3.3. Necht' G a H jsou svazy, $f: G \rightarrow H$ zobrazení.

1. Je-li f svazový homomorfismus, pak f je izotonní zobrazení a homomorfní obraz

$$f(G) = \{f(a); a \in G\},$$
 je podsvaz svazu H .
2. Zobrazení f je svazový izomorfismus, právě když f je izomorfismus uspořádaných množin [1], [15], [18].

2.6 Úplné svazy

Podle věty 2.4 v libovolném svazu má každá neprázdná konečná podmnožina $\{a_1, \dots, a_n\}$ supremum $a_1 \vee \dots \vee a_n$ a infimum $a_1 \wedge \dots \wedge a_n$. Nekonečná podmnožina však supremum či infimum obecně mít nemusí.

Uspořádaná množina, v níž pro každou podmnožinu existuje supremum i infimum, se nazývá úplný svaz.

Každý úplný svaz G má nejmenší prvek (infimum množiny G ve svazu G) a největší prvek (supremum množiny G ve svazu G).

Promysleme si, co znamená infimum, resp. supremum, prázdné podmnožiny svazu G . Je-li $A \subseteq G$, pak infimum množiny A ve svazu G je největší dolní závora množiny A ve svazu G . Dolní závora množiny A ve svazu G je prvek $x \in G$ takový, že pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$. V případě $A = \emptyset$ je tato podmínka splněna pro každé $x \in G$, a tedy odtud plyne, že každý prvek svazu G je v G dolní závorou prázdné množiny. Proto infimum prázdné množiny ve svazu G je největší prvek svazu G . Duálně: supremem prázdné množiny ve svazu G je nejmenší prvek svazu G .

Příklad. Zřejmě platí, že každý úplný svaz je svazem a podle věty 2.4 je každý neprázdný konečný svaz úplným svazem.

Příklad. Prázdný svaz není úplný, neboť pro jeho (jedinou) prázdnou podmnožinu neexistuje infimum ani supremum. Jinými slovy: prázdný svaz nemá nejmenší prvek ani největší prvek, protože nemá žádný prvek.

Příklad. Pro libovolnou množinu X je $(2^X, \subseteq)$ úplný svaz.

Příklad. Pro libovolnou nekonečnou množinu X tvoří množina všech konečných podmnožin množiny X spolu s inkluzí \subseteq svaz, který není úplným svazem.

Příklad. Nekonečný řetězec nemusí být úplný svaz (například (\mathbb{N}, \leq) není úplný svaz, neboť neexistuje supremum celé množiny \mathbb{N}).

Věta 4.1. Necht' (G, \leq) je uspořádaná množina. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. (G, \leq) je úplný svaz.
2. (G, \leq) má nejmenší prvek a každá neprázdná podmnožina množiny G má v uspořádané množině (G, \leq) supremum.
3. (G, \leq) má největší prvek a každá neprázdná podmnožina množiny G má v uspořádané množině (G, \leq) infimum.

Vzhledem k předchozí poznámce víme, že podmínku 2 lze formulovat stručněji takto: každá podmnožina množiny G má v uspořádané množině (G, \leq) supremum. Analogicky pro podmínku 3: každá podmnožina množiny G má v uspořádané množině (G, \leq) infimum.

Příklad. Svaz všech podgrup dané grupy G je dle předchozí věty úplný svaz, neboť má největší prvek (celou grupu G) a každá neprázdná množina podgrup má v tomto svazu infimum, kterým je průnik těchto podgrup. Rovněž svaz všech podsvazů (popřípadě svaz ideálů nebo svaz filtrů) daného svazu je úplný svaz. Díky analogickým větám o průnicích neprázdných systémů určitých podstruktur lze totéž říci i o svazu všech podokruhů daného okruhu nebo o svazu jeho ideálu, o svazu všech podtěles daného tělesa nebo o svazu všech podprostorů daného vektorového prostoru.

Příklad: $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ je dle předchozí věty úplný svaz, neboť má největší prvek ∞ a každá neprázdná podmnožina množiny $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ má v $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ infimum (plyne z dobré uspořádanosti).

Příklad: Ze svazu $(\mathbb{N}, |)$, který není úplný, lze doplněním nuly (ta se stane jeho největším prvkem) vytvořit úplný svaz $(\mathbb{N} \cup \{0\}, |)$.

Jak ukazuje následující věta, předchozí případy nebyly nijak výjimečné. Vždy existuje způsob, jak doplnit svaz tak, aby se stal úplným.

Věta 4.2. Necht' G je svaz. Pak existuje úplný svaz U , který obsahuje podsvaz H , jenž je izomorfní se svazem G .

Věta 4.3 (Tarski). Necht' G je úplný svaz, $\varphi: G \rightarrow G$ izotonní zobrazení. Pak existuje prvek $a \in G$ tak, že $\varphi(a) = a$ (tj. a je pevný bod zobrazení φ) [1], [15], [19].

2.7 Součin svazů

Podobně jako lze součinem grup $(G, \cdot), (H, \cdot)$, získat grupu $(G \times H, \cdot)$ na kartézském součinu nosičů obou grup, můžeme součinem svazu získat nový svaz. Konstrukce bude naprosto stejná: operace uspořádaných dvojic se provedou nezávisle v každé složce.

Nechť $(G, \vee, \wedge), (H, \vee, \wedge)$ jsou svazy. Na kartézském součinu $G \times H$ definujeme nové operace \vee a \wedge takto: pro každé $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$ klademe

$$(g_1, h_1) \vee (g_2, h_2) = (g_1 \vee g_2, h_1 \vee h_2),$$

$$(g_1, h_1) \wedge (g_2, h_2) = (g_1 \wedge g_2, h_1 \wedge h_2),$$

Věta 5.1. Za předpokladů učiněných v předchozí definici tvoří $(G \times H, \vee, \wedge)$ svaz.

V součinu svazu platí všechny rovnosti platné v obou svazech. Vlastnosti, které se však nedají vyjádřit jako konjunkce rovností, už součin svazu zdědit nemusí. Například vlastnost být řetězec můžeme zachytit takto: pro každé dva prvky x, y platí $x \leq y$ nebo $x \geq y$, což pomocí svazových operací lze zapsat podmínkou $x \wedge y = x$ nebo $x \wedge y = y$. To ale není konjunkce rovností, ale disjunkce. A skutečně, tato vlastnost se součinem nedědí: součinem dvou dvouprvkových řetězců je čtyřprvkový svaz, jež není řetězec.

Podobně jako součin dvou svazů jsme mohli definovat i součin n svazů pro libovolné $n \in \mathbb{N}$: na kartézském součinu nosných množin daných svazů se nové operace \vee a \wedge definují po složkách [1], [15].

2.8 Modulární svazy

Viděli jsme ve větě 2.3, že v libovolném svazu G pro každou trojici prvku $a, b, c \in G$ takových, že $c \leq a$, platí modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Svaz G se nazývá modulární, jestliže pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ takových, že $c \leq a$, platí modulární rovnost

$$(a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c).$$

Příklad: Příklady modulárních svazů jsou svaz $(2^x, \cup, \cap)$ všech podmnožin nějaké množiny X nebo libovolný řetězec.

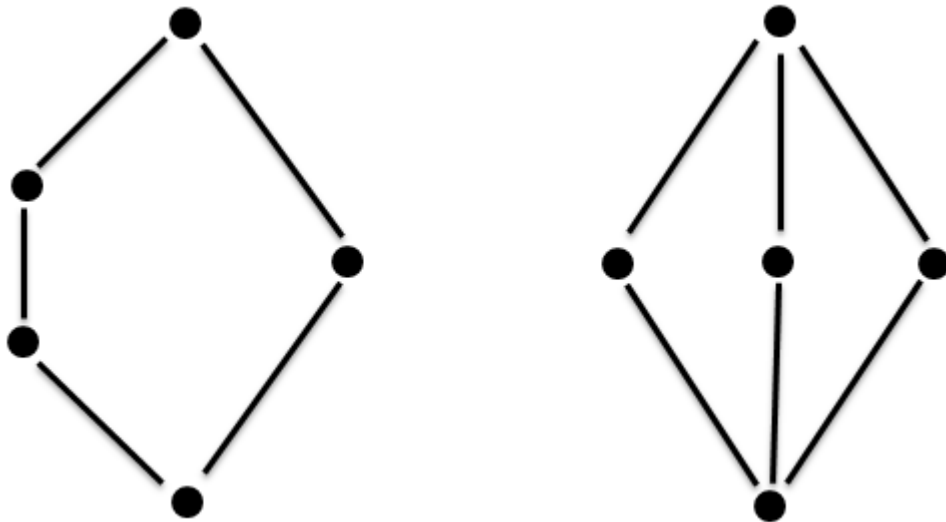
Příklad: Ukážeme, že svaz N_5 , zvaný též pětiúhelník, není modulární, kdežto svaz M_5 , zvaný též diamant, je modulární (Obr. 17). Označme $0 < c < a < 1$ ony čtyři prvky, které

jsou v Hasseově diagramu svazu N_5 nakresleny nad sebou vlevo, a b jeho pátý prvek. Pak nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c = 0 \vee c = c < a = a \wedge 1 = a \wedge (b \vee c)$$

ukazuje, že svaz N_5 není modulární.

Nyní probírkou všech možností dokažme, zda svaz M_5 je modulární. Označme 0 nejmenší a 1 největší prvek tohoto svazu. Nechť tedy $a, b, c \in M_5$ jsou libovolné takové, že $c \leq a$. Jestliže $a = c$, plyne modulární rovnost z absorpčních zákonů. Jestliže $c \leq a$, pak na Hasseově diagramu svazu M_5 vidíme, že buď $c = 0$ nebo $a = 1$. V obou případech je modulární rovnost zřejmá.



Obr. 17 Vlevo svaz N_5 (pětiúhelník), vpravo svaz M_5 (diamant)

Věta 6.1. Svaz všech normálních podgrup dané grupy je modulární.

Věta 6.2. Podsvaz modulárního svazu je modulární svaz.

Příklad: Svaz všech podprostorů daného vektorového prostoru V nad tělesem T je podle předchozí věty modulární. Je totiž podsvazem modulárního svazu všech podgrup grupy vektorů V , k tomu si stačí uvědomit, že každý podprostor je podgrupou, a ověřit, zda infima i suprema se ve svazu všech podprostorů počítají stejně jako ve svazu podgrup: infimum je množinový průnik a supremem součet podprostorů.

Věta 6.3: Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvku $a, b, c \in G$ platí

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)).$$

Součin modulárních svazů je modulární svaz. Homomorfní obraz modulárního svazu je modulární svaz.

Věta 6.4. Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvku $a, b, c \in G$ platí implikace

$$a \geq c, a \wedge b = c \wedge b, a \vee b = c \vee b \Rightarrow a = c.$$

Následující věta ukazuje, že modularitu je možné charakterizovat pomocí svazu N_5 (tj. pětiúhelníku).

Věta 6.5. Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 .

Duální svaz k modulárnímu svazu je opět modulární [1], [15], [19].

2.9 Distributivní svazy

Podle věty 2.3 v libovolném svazu G pro každou trojici prvku $a, b, c \in G$ platí distributivní nerovnosti

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leq a \vee (b \wedge c),$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Svaz G se nazývá distributivní, jestliže pro každou trojici prvku $a, b, c \in G$ platí distributivní rovnost

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c).$$

Příklad: Příklady distributivních svazů jsou svazy všech podmnožin nějaké množiny nebo libovolný řetězec.

Věta 7.1. Nechť G je distributivní svaz. Pak pro každou trojici prvku $a, b, c \in G$ platí i následující distributivní rovnost

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c).$$

Duální tvrzení k předchozí větě znamená, že z podmínky z věty plyne podmínka z definice. Je tedy lhostejné, kterou z obou distributivních rovností užijeme v definici, mohli jsme užít i obě najednou.

Duální svaz k distributivnímu svazu je opět distributivní.

Věta 7.2. Každý distributivní svaz je modulární.

Věta 7.3. Podsvaz distributivního svazu je distributivní svaz.

Věta 7.4. Součin distributivních svazů je distributivní svaz. Homomorfní obraz distributivního svazu je distributivní svaz.

Věta 7.5. Svaz G je distributivní, právě když pro každou trojici prvku $a, b, c \in G$ platí implikace

$$a \wedge b = c \wedge b, a \vee b = c \vee b \Rightarrow a = c.$$

Z následující věty a věty 6.5 plyne analogie věty 6.5 pro distributivní svazy: svaz G je distributivní, právě když neobsahuje ani podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamant) ani podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelník).

Věta 7.6. Modulární svaz G je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem M_5 .

Na závěr kapitoly o distributivních svazech si uvedeme charakterizaci konečných distributivních svazů.

Prvek a svazu G se nazývá \vee - nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $a = b \vee c$, platí $a = b$ nebo $a = c$.

Prvek a svazu G je tedy \vee - nedosažitelný, jestliže není supremem žádných dvou prvků ostře menších než on, tj. neexistují $b, c \in G$ splňující $b < a, c < a, a = b \vee c$. Ekvivalentně lze tuto podmínku vyjádřit také takto: prvek a svazu G je \vee - nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $b < a$ a současně $c < a$, platí $b \vee c < a$. Odtud se snadno dokáže indukcí, že takový prvek není supremem žádné neprázdné konečné množiny prvků ostře menších než on.

Množinu všech \vee - nedosažitelných prvků svazu G označíme $J(G)$.

Věta 7.7. V konečném distributivním svazu G je libovolný prvek a roven supremu množiny všech \vee - nedosažitelných prvků, které neostře převyšuje, tj.

$$a = \bigvee_{b \in J(G), b \leq a} b = \bigvee (a \downarrow \cap J(G)).$$

Necht' (A, \leq) je uspořádaná množina. Množina $B \subseteq A$ se nazývá (dolů) dědičná, pokud pro každý prvek $b \in B$ a každý prvek $a \in A, a \leq b$, platí $a \in B$.

Množina $B \subseteq A$ je tedy dědičná, jestliže s každým svým prvkem obsahuje všechny prvky množiny A , jež jsou ještě menší. Pomocí této vlastnosti můžeme charakterizovat ideály svazu: jsou to právě dědičné podsvazy. Připomeňme, že na svazy se můžeme dívat jako na uspořádané množiny a že dva svazy jsou izomorfní, právě když jsou izomorfní jako uspořádané množiny.

Množinu všech neprázdných dědičných podmnožin uspořádané množiny A značíme $D(A)$.

Věta 7.8. Pro konečný distributivní svaz G uvažme množinu $J(G)$ všech v - nedosažitelných prvků svazu G spolu s uspořádáním indukujícím na $J(G)$ uspořádání svazu G . Pak uspořádaná množina $(D(J(G)), \subseteq)$ je izomorfní se svazem G (chápaným jako uspořádaná množina).

Věta mimo jiné říká, že je-li G konečný distributivní svaz, pak i $(D(J(G)))$ je konečný distributivní svaz. Protože sjednocení i průnik dědičných množin je opět dědičná množina, jsou operacemi suprema a infima v $(D(J(G)))$ právě množinový průnik a sjednocení. Je tedy $(D(J(G)))$ podsvazem svazu všech podmnožin množiny $J(G)$.

Každý konečný distributivní svaz je izomorfní s některým podsvazem svazu všech podmnožin nějaké konečné množiny.

Podle předchozího důsledku každý konečný distributivní svaz můžeme chápat jako inkluzí uspořádaný systém množin, uzavřený na průniky a sjednocení. Protože naopak každý inkluzí uspořádaný systém množin, uzavřený na průniky a sjednocení, je zřejmě distributivním svazem, dostali jsme tak slíbenou charakterizaci konečných distributivních svazů [1], [15], [19].

3 ZÁKLADNÍ MORFOLOGICKÉ OPERACE

Mezi základní morfologické operátory patří:

- Dilatace
- Eroze
- Otevření
- Uzavření
- Skelet
- Hit-miss transformace
- Ztenčování
- Zesilování

3.1 Dilatace

Dilatace množiny A se strukturním prvkem B je rovna Minkowskému součtu množin. Minkowského součet mění tvar a velikost dané množiny. Množina se může posunovat, zvětšovat, ale taky různě deformovat

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

Dilataci lze vyjádřit jako sjednocení posunutých bodových množin

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} (X_b).$$

Nejvhodnější použití dilatace je k zaplnění malých děr, protože dilatace zvětšuje objekty. Dilatace lze použít také v kombinaci s erozí. Ke kombinaci dochází v případě, že chceme zachovat původní rozměr objektu.

Vlastnosti dilatace:

- Komutativnost: $A \oplus B = B \oplus A$
- Asociativnost: $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
- Rostoucí transformace: $A \subseteq J \Rightarrow A \oplus B \subseteq J \oplus B$
- Sjednocení posunutých bodových množin: $A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A_b)$
- Invariance k translaci: $A_T \oplus B = (A \oplus B)_T$ [5], [7], [22]

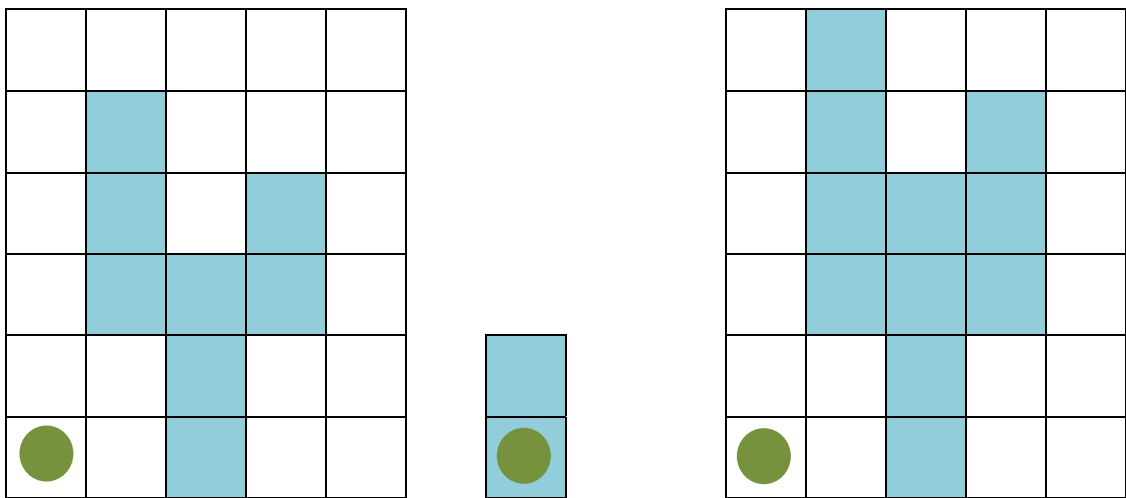
Příklad: Jestliže je definována bodová množina obrazu A a strukturní element B

$$A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,0), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3)\}$$

$$B = \{(0,0), (0,1)\}$$

Pro dilataci platí:

$$A \oplus B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,0), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), \\ (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4)\}$$



Obr. 18 Ukázka dilatace

3.2 Eroze

Binární eroze skládá dvě množiny pomocí Minkowského rozdílu. Minkowského rozdíl je definován jako množinový doplněk Minkowského součtu množinového doplňku A a strukturního elementu B

$$A \ominus B = (A^c \oplus B)^c.$$

Eroze je duální morfologická transformace k dilataci

$$X \ominus B = \{p \in \mathbb{E}^2: p + b \in X \text{ pro každé } b \in B\}.$$

Erozi lze vyjádřit jako průnik všech posunů obrazu X o vektory $-b \in B$

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b}.$$

Eroze se používá ke zjednodušení struktur. Rozkládá objekty na jednodušší části. Pokud je objekt menší než strukturální element, objekt vymizí.

Vlastnosti eroze:

- Antiextenzivní: Je-li $(0,0) \in B$, potom $X \ominus B \subseteq X$.
- Invariantní vůči posunu: $X_h \ominus B = (X \ominus B)_h, X \ominus B_h = (X \ominus B)_{-h}$
- Zachovává inkluzi: Je-li $X \subseteq Y$, potom $X \ominus B \subseteq Y \ominus B$
- Dualita eroze a dilatace: $(X \ominus Y)^c = X^c \oplus Y$
- Kombinace eroze a průniku: $(X \cap Y) \ominus B = (X \ominus B) \cap (Y \ominus B), B \ominus (X \cap Y) \supseteq (B \ominus X) \cup (B \ominus Y)$

Postupná dilatace (resp. eroze) obrazu X nejdříve strukturálním elementem B a potom strukturálním elementem D je totožná jako dilatace (resp. eroze) obrazu X pomocí $B \oplus D$

$$(X \oplus B) \oplus D = X \oplus (B \oplus D),$$

$$(X \ominus B) \ominus D = X \ominus (B \ominus D) \text{ [5], [7], [21].}$$

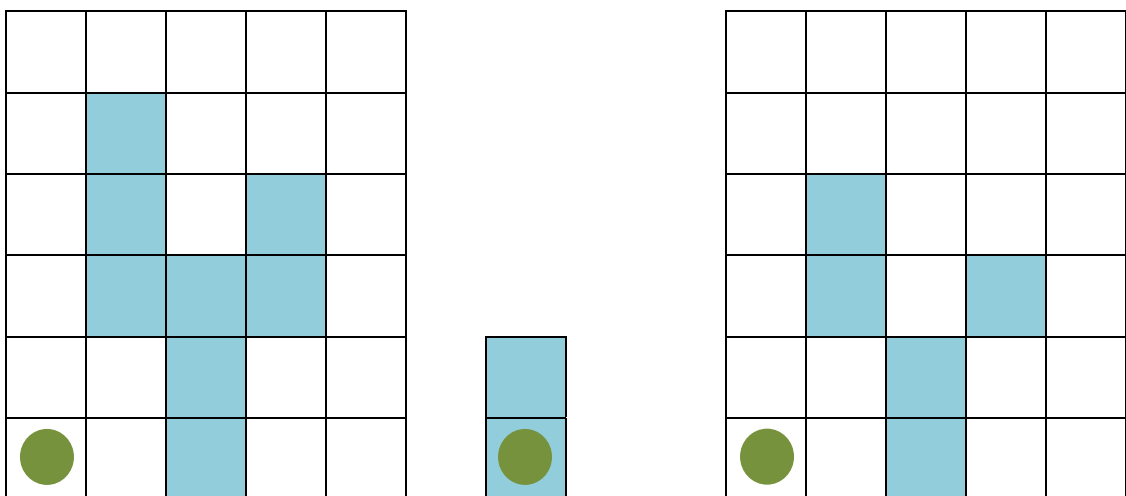
Příklad: Jestliže je definována bodová množina obrazu A a strukturální element B

$$A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,0), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3)\}$$

$$B = \{(0,0), (0,1)\}$$

Pro erozi platí:

$$A \ominus B = \{(1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (3,2)\}$$



Obr. 19 Ukázka eroze

3.3 Morfologické otevření

Jedná se o transformaci eroze, po které následuje dilatace

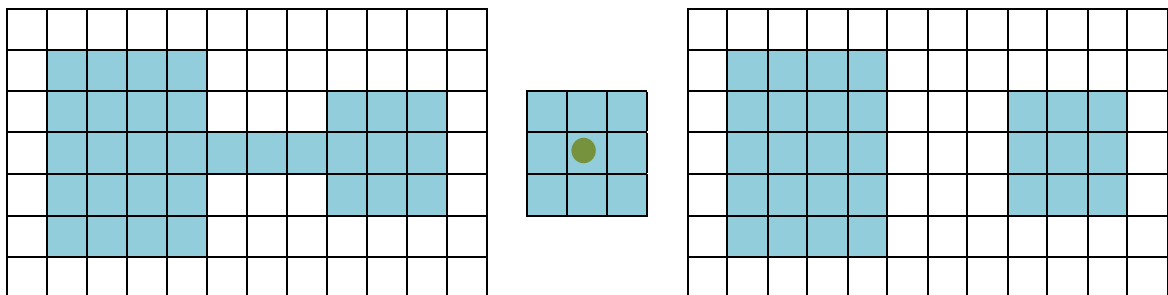
$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B.$$

Při morfologickém otevření zůstávají původní rozměry a základní tvar objektu neporušeny. Používá se pro snížení množství detailů v obrazu a k odstraňování šumu. Pokud jsou objekty spojeny tenkou čarou, morfologické otevření tento spoj odstraňuje. Na rozdíl od dilatace a eroze je otevření nezávislé na posunu souřadnic počátku strukturního elementu.

Vlastnosti otevření:

- Antiextenzivnost: $X \circ B \subseteq X$
- Idempotentnost: $X \circ B = (X \circ B) \circ B$

Množina X je již po první aplikaci operátoru otevřená vzhledem ke strukturnímu elementu B a opakovaná aplikace již nemění výsledek operace [5], [6], [12].



Obr. 20 Ukázka morfologického otevření

3.4 Morfologické uzavření

Jedná se o transformaci dilatace, po níž následuje eroze

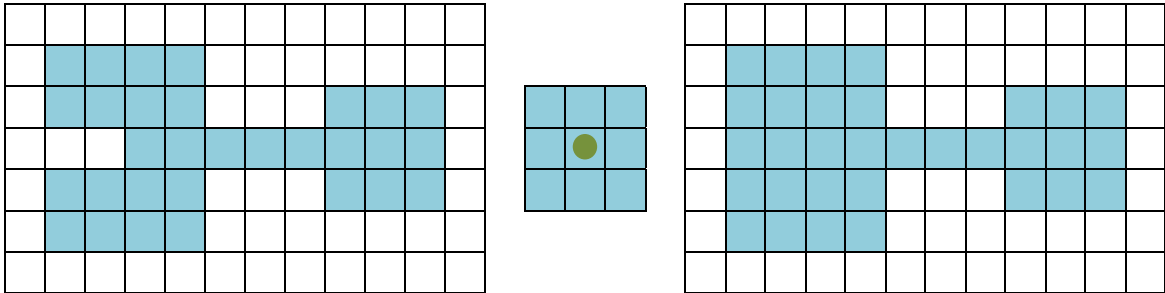
$$X \cdot B = (X \oplus B) \ominus B.$$

Pro morfologické uzavření platí podobné podmínky jako pro morfologické otevření. Při morfologickém uzavření zůstávají původní rozměry a základní tvar objektu neporušeny. Používá se pro spojení blízkých objektů nebo pro zaplňování děr. Míra spojení a zaplnění je dána velikostí a tvarem strukturního elementu. Tento strukturní element je pro obě operace stejný.

Vlastnosti uzavření:

- Extenzivnost: $X \subseteq X \cdot B$
- Idempotentnost: $X \cdot B = (X \cdot B) \cdot B$

Množina X je již po první aplikaci operátoru otevřená vzhledem ke strukturnímu elementu B a opakovaná aplikace již nemění výsledek operace [5], [6], [12].



Obr. 21 Ukázka morfologického uzavření

3.5 Hit-miss transformace

Hit-miss transformace, někdy nazývaná taky jako Serrova transformace, vyhledává shody mezi bodovou množinou binárního obrazu X a definovaným složeným strukturním elementem B

$$B = \{B_1, B_2\}, B_1 \cap B_2 = \emptyset.$$

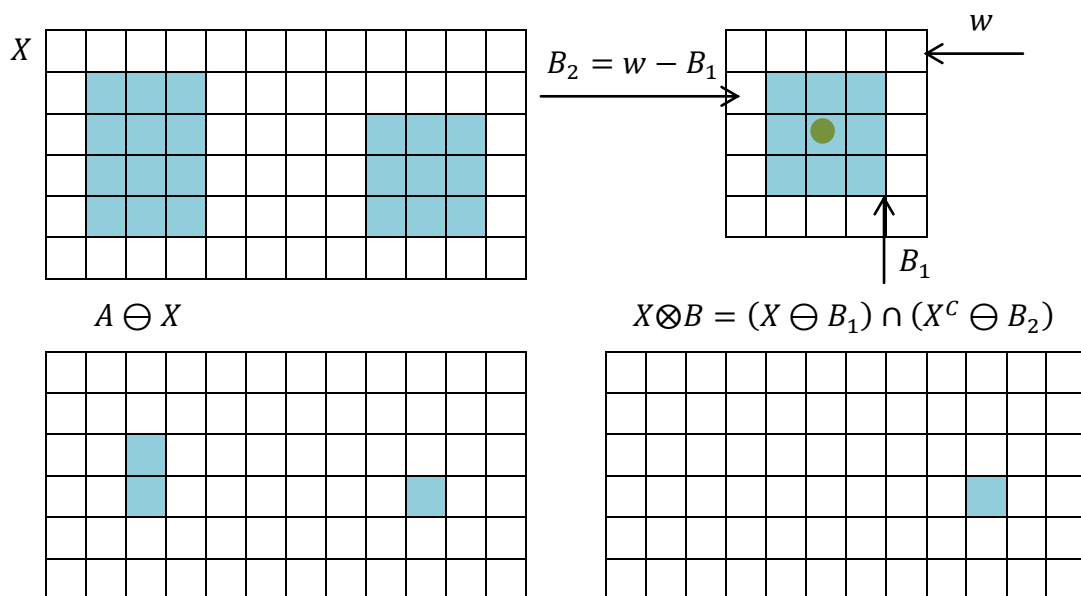
Hit-miss transformace, zachová body z množiny X , jenž se nacházejí v sub-elementu B_1 a zároveň se nenacházejí v sub-elementu B_2

$$X \otimes B = \{p \in X : B_1 \subset X \wedge B_2 \subset X^c\}.$$

Transformaci tref či miň lze vyjádřit pomocí operací dilatace a eroze

$$X \otimes B = (X \ominus B_1) \cap (X^c \ominus B_2) = (X \ominus B_1) | (X \ominus B_2).$$

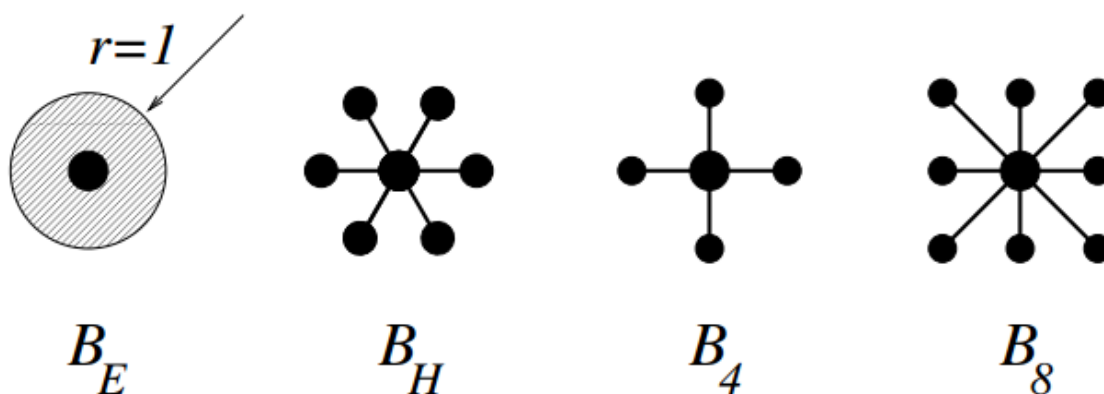
Hit-miss transformace je použito pro operace zeslabení a zesílení bodových množin. Dále se této transformace používá k identifikaci a speciálních konfigurací pixelů. Například u izolovaných pixelů, koncových pixelů u linií a jiných konfigurací [5], [6], [12].



Obr. 22 Ukázka transformace tref či miň

3.6 Kostra (skelet)

Reprezentace objektů v obraze X za pomoci tenkých čar je nazýván skelet $S(X)$. Čáry skeletu jsou sjednocením bodů odpovídajících středům kružnic. Tyto body jsou obsaženy v objektech množiny X a dotýkají se její hranice nejméně dvěma body. Jako skelet může být brána jakákoliv topologická křivka. Skelet vytvořený pomocí operací dilatace a eroze může být širší než jeden bod. Proto se skelet aproximuje kostrou objektu získanou pomocí sekvenčního zeslabení.



Obr. 23 Diskrétní kruhy o poloměru jedna

Pro morfologický skelet kontinuálního obrazu Lantuéjoul odvodil následující vzorec

$$S(X) = \bigcup_{p>0} \bigcap_{u>0} [(X \ominus pB) - (X \ominus pB) \circ u\bar{B}].$$

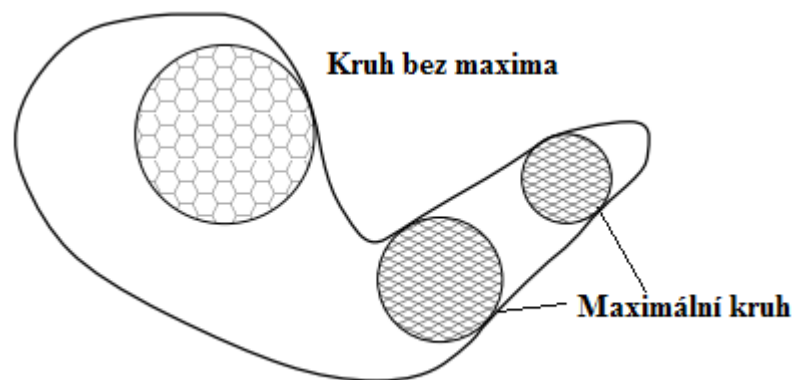
Pro diskrétní obrazy byl vzorec upraven následovně

$$S_n(X) = (X \ominus nB) - (X \ominus nB) \circ B.$$

Původní tvar ze skeletu může být rekonstruován z množiny $\{S_n(X)\}$

$$X = \bigcup_n (S_n(X) \oplus nB).$$

Maximální kruh vepsaný do množiny se dotýká hranice ve dvou a více bodech.



Obr. 24 Ukázka skeletu s maximálním kruhem

3.6.1 Algoritmy binární skeletonizace oblastí

Vpisování kruhů je výpočetně složité a proto se prakticky nepoužívá. Skelet má tloušťku větší než jedna. Porušuje se souvislost.

Sekvenční zeslabení rozrušuje oblast vhodným strukturálním elementem. Ten zaručuje, aby nebyla přerušena souvislost. Homotopické zeslabení obvykle využívá strukturálních elementů z Golayovy abecedy.

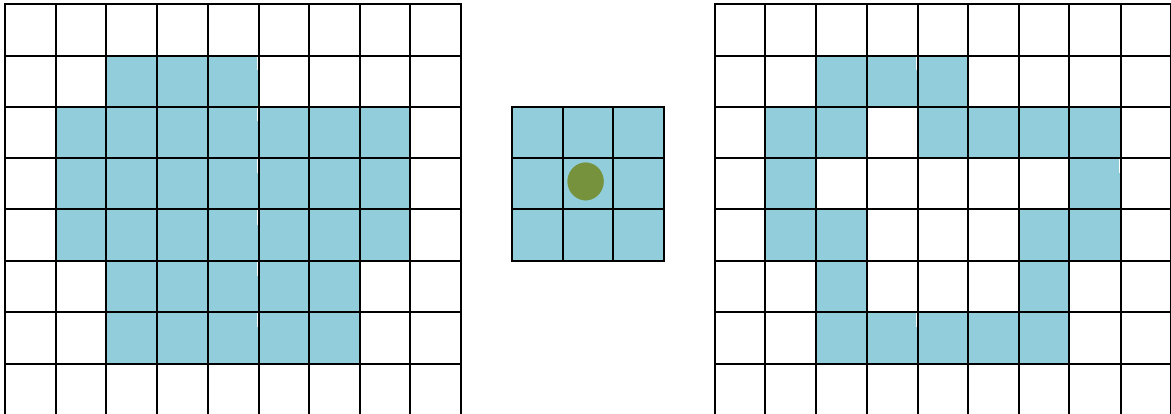
Přes vzdálenostní transformaci. Výpočetně rychlé, proto se nejčastěji využívá.

V koutkové reprezentaci – jsou oblasti bezztrátově komprimované. Skelet se počítá vpisováním maximálních obdélníků přímo v komprimovaných datech [5], [6], [23].

3.7 Morfologická extrakce hranice

Tato morfologická metoda se používá v případech, kdy chceme zachovat pouze obrys objektu

$$B(A) = A - (A \ominus B).$$



Obr. 25 Ukázka extrakce hranice

3.8 Morfologické zeslabení

Při morfologickém zeslabení dochází k množinovému odečítání. Zeslabená oblast určená strukturálním elementem B je množinově odečítána od samotného objektu. B je stejně jako v transformaci tref či miň. Složený strukturální element ($B = B_1, B_2$)

$$X \oslash B = X \setminus (X \otimes B).$$

Při sekvenčním zeslabení se zachovává počet oblastí a děr. Konvergence sekvenčního zeslabení vede na čáry o šířce právě jednoho obrazového bodu. Proto sekvenční zeslabení se stejným strukturálním elementem, který je ve stavu idempotence, je používán jako aproximace skeletu.

Sekvenční zeslabení je opakovaná aplikace transformace prostého zeslabení s posloupností složených strukturálních elementů. Necht' $\{B_{(1)}, B_{(2)}, B_{(3)}, \dots, B_{(n)}\}$ je posloupnost složených strukturálních elementů

$$B_{(i)} = (B_{(i1)}, B_{(i2)}).$$

Sekvenční zeslabení může být pro čtvercový rastr vyjádřeno pomocí posloupnosti strukturních elementů

$$X \oslash \{B_{(i)}\} = (((X \oslash B_{(1)}) \oslash B_{(2)}) \dots \oslash B_{(n)}) [5], [6].$$

3.9 Morfologické zesílení

Při morfologickém zesílení je oblast sjednocována s částí pozadí danou strukturním elementem B

$$X \odot B = X \cup (X^c \otimes B).$$

Zeslabení a zesílení jsou duální transformace

$$(X \odot B)^c = \frac{X^c}{B}, B = (B_2, B_1).$$

Sekvenční zesilování je opakovaná aplikace transformace prostého zesílení s posloupností složených strukturních elementů. Necht' $\{B_{(1)}, B_{(2)}, B_{(3)}, \dots, B_{(n)}\}$ je posloupnost složených strukturních elementů

$$B_{(i)} = (B_{(i1)}, B_{(i2)}).$$

Sekvenční zesílení může být pro čtvercový rastr vyjádřeno pomocí posloupnosti strukturních elementů

$$X \odot \{B_{(i)}\} = (((X \odot B_{(1)}) \odot B_{(2)}) \dots \odot B_{(n)}) [5], [6].$$

3.10 Golayova abeceda

Golayova abeceda je složena ze skupiny významných složených strukturních elementů s definovaným použitím. Základní elementy Golayovy abecedy jsou: L, E, M, D, C. Strukturní element je tvořen:

- 1 - ověřují příslušnost objektu
- 0 - ověřují příslušnost k pozadí
- * - prvek nic neovlivní

Každý element Golayovy abecedy má osm variant strukturních elementů pro čtvercový rastr a osm variant pro oktogonální rastr [5], [6], [21].

II. PRAKTICKÁ ČÁST

4 FORMÁLNÍ KONCEPTUÁLNÍ ANALÝZA

Formální konceptuální analýza (FCA) je jednou z metod pro analýzu tabulkových dat. Této metody lze používat v různých oblastech. Vstupem pro FCA jsou data v tabulkách. Tabulková data lze získat z objektů a jejich atributů. Atribut můžeme chápat jako vlastnost konkrétního objektu. Pomocí FCA je možné vytvořit grafický výstup objektů. Z toho výstupu lze zjistit, jak spolu objekty vzájemně souvisí. Nalezené koncepty můžeme brát jako celek, protože zachovávají všechny detaily zadaného kontextu. To je výhoda formální konceptuální analýzy na rozdíl od jiných analytických metod. Koncepty lze přirozeně uspořádat.

4.1 Historie formální konceptuální analýzy

Matematický základ vytvořil Garrett Birkhoff v roce 1930. Snažil přiblížit teorii svazů k praktickému využití. Za zakladatele této metody je považován Němec Rudolf Wille. Navázal na Birkhoffa a položil základy formální konceptuální analýzy v roce 1982. Zpočátku byla FCA zkoumána především malou skupinou vědců a studentů v Německu. Prostřednictvím financovaných výzkumných projektů byla formální konceptuální analýza rozšířena do rozsáhlejších projektů v různých odvětvích. FCA může být používána v matematice, psychologii, biologii, softwarovém inženýrství, v informatice a mnoha dalších odvětvích [2], [13].

4.2 Úvod do formální konceptuální analýzy

Jak už bylo dříve zmíněno, tabulková data lze získat z objektů a jejich atributů. Řádky obvykle odpovídají objektům, sloupce atributům. Jednotlivé položky tabulky odpovídají objektu x a atributu y . Tyto položky obsahují informaci o konkrétní hodnotě. Formální konceptuální analýza nabízí netriviální informace o vstupních datech. Tyto data mohou být využity přímo, což znamená, že nové poznatky o vstupních datech nejsou pouhým pohledem na vstupní data zřejmé. Tabulková data představují základní formu reprezentace dat pro různé metody analýzy a zpracování dat.

	y_1	\dots	y_j	\dots	y_l
x_1			\vdots		
\vdots			\vdots		
x_i	\dots	\dots	$I(x_i, y_j)$	\dots	\dots
\vdots			\vdots		
x_k			\vdots		

Obr. 26 Tabulková data s objekty a atributy

Výstupy formální konceptuální analýzy lze rozdělit do dvou skupin. První skupinou výstupů je konceptuální svaz. Konceptuální svaz je hierarchicky uspořádaná množina shluků a tzv. formálních konceptů, které jsou přítomny ve vstupní tabulce dat. Druhou skupinou výstupů jsou atributové implikace. Ty popisují jisté závislosti mezi atributy tabulky dat.

Na obrázku (Obr. 27) můžeme vidět, že jsou atributy ve vstupních datech brány jako bivalentní logické atributy. Tyto atributy mají v položce odpovídající x a y hodnotu 0 (x má y) nebo hodnotu 1 (x nemá y) [2], [13].

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
x_1	1	1	0	0	1	1	1
x_2	0	1	1	0	1	1	0
x_3	0	0	1	1	0	1	1
x_4	1	0	1	1	0	1	1

Obr. 27 Tabulka popisující objekty x a atributy y

4.2.1 Formální koncepty, konceptuální svaz

Ve formální konceptuální analýze je termín pojem chápán v souladu s tzv. Port-Royalskou logikou, která popisuje pojem svým rozsahem a obsahem. Rozsah pojmů lze chápat jako seskupení všech objektů patřících do pojmů. Obsah pojmu je seskupení všech atributů, jež do pojmu patří. Pojem lze chápat jako dvojici (A, B) , kde A je množina objektů a B je množina atributů, které pod pojem patří. Ovšem ne vždy můžeme každou dvojici (A, B) považovat za pojem. Je nutné, aby A byla právě množinou všech objektů sdílejících všechny atributy z B a naopak. Pojem ve smyslu FCA budeme dále nazývat jako koncept, popřípadě formální koncept. Koncepty jednoznačně odpovídají v tabulkových datech maximálním obdélníkům.

Řekněme, že koncept (A_1, B_1) je podpojemem konceptu (A_2, B_2) , pokud platí, že každý objekt z A_1 patří do A_2 . Ekvivalentně pak každý atribut z B_1 patří do B_2 . Tato podmínka, značená $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$, odpovídá intuici. Uspořádaná množina všech konceptů, podle jejich obecnosti, se nazývá konceptuální svaz [2], [13], [20].

4.3 Základní pojmy a definice FCA

V této kapitole se podrobně seznámíme se základními pojmy FCA. Konkrétně s formálními kontexty, indukovanými Galoisovy konexemi, formálními koncepty, konceptuálními svazy, atributovými implikacemi a s konceptuálním škálováním.

4.3.1 Formální kontext, indukované Galoisovy konexe

(Formální) kontext je trojice $\langle X, Y, I \rangle$, kde I je binární relace mezi množinami X a Y . Prvky množiny X , resp. Y , se nazývají objekty, resp. atributy. Fakt $\langle x, y \rangle \in I$ interpretujeme tak, že objekt x má atribut y . Formální kontext tedy reprezentuje výše zmíněná tabulková objekt-atributová data.

Každý kontext $\langle X, Y, I \rangle$ indukuje zobrazení $\uparrow: 2^X \rightarrow 2^Y$ a $\downarrow: 2^Y \rightarrow 2^X$ předpisem

$$A^\uparrow = \{y \in Y \mid \forall x \in A: \langle x, y \rangle \in I\}$$

pro $A \subseteq X$ a

$$B^\downarrow = \{x \in X \mid \forall y \in B: \langle x, y \rangle \in I\}$$

pro $B \subseteq Y$.

A^\uparrow je tedy množina všech atributů společných všem objektům z A ; B^\downarrow je množina všech objektů, které sdílejí všechny atributy z B .

Zobrazení $f: 2^X \rightarrow 2^Y$ a $g: 2^Y \rightarrow 2^X$ tvoří tzv. Galoisovu konexi mezi množinami X a Y , pokud pro $A, A_1, A_2 \subseteq X$ a $B, B_1, B_2 \subseteq Y$ platí $A_1 \subseteq A_2$ implikuje $f(A_2) \subseteq f(A_1)$; $B_1 \subseteq B_2$ implikuje $g(B_2) \subseteq g(B_1)$; $A \subseteq g(f(A))$; $B \subseteq f(g(B))$;

Věta 1. Pro binární relaci $I \subseteq X \times Y$ tvoří indukovaná zobrazení $\uparrow_I a^\downarrow$ Galoisovu konexi mezi X a Y . Naopak, tvoří-li f a g Galoisovu konexi mezi X a Y , existuje binární relace $I \subseteq X \times Y$ tak, že $f = \uparrow_I a^\downarrow$ a $g = \downarrow_I a^\uparrow$. Tím je dán vzájemně jednoznačný vztah mezi Galoisovými konexemi mezi X a Y a binárními relacemi mezi X a Y [2], [13], [20].

4.3.2 Formální koncepty, konceptuální svaz

(Formální) koncept v kontextu $\langle X, Y, I \rangle$ je dvojice (A, B) , kde $A \subseteq X$ a $B \subseteq Y$ jsou takové, že $A^\uparrow = B$ a $B^\downarrow = A$.

Formální koncept je tedy dvojice sestávající z množiny A objektů i množiny B atributů takových, že B jsou právě všechny atributy společné objektům A a A jsou právě všechny objekty sdílející atributy z B . Z matematického pohledu je koncept právě pevným bodem Galoisovy konexe dané $\uparrow a^\downarrow$.

Množinu všech formálních konceptů v $\langle X, Y, I \rangle$ značíme $\beta(X, Y, I)$, tj.

$$\beta(X, Y, I) = \{(A, B) \mid A \subseteq X, B \subseteq Y, A^\uparrow = B, B^\downarrow = A\} [2], [13].$$

Příklad 1. O formální koncept $\langle A, B \rangle$ se jedná, pokud obsahuje objekty A , který sdílí atributy B . Tohle platí i obráceně, pokud B obsahuje všechny atributy, jenž jsou sdíleny se všemi objekty A , jedná se také o formální koncept.

I	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄
x ₁	X	X		
x ₂	X	X		
x ₃		X	X	
x ₄		X	X	X
x ₅			X	X

Tab. 1 Formální koncept $\langle A_1, B_1 \rangle$

Zvýrazněný část v tabulce reprezentuje následující kontext:

$$\langle A_1, B_1 \rangle = \langle \{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\} \rangle,$$

Protože platí

$$\{x_1, x_2\}^\uparrow = \{y_1, y_2\} \text{ a } \{y_1, y_2\}^\downarrow = \{x_1, x_2\}$$

V následujících tabulkách (Tab. 2) se nacházejí další formální koncepty:

I	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄
x ₁	X	X		
x ₂	X	X		
x ₃		X	X	
x ₄		X	X	X
x ₅			X	X

I	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄
x ₁	X	X		
x ₂	X	X		
x ₃		X	X	
x ₄		X	X	X
x ₅			X	X

I	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄
x ₁	X	X		
x ₂	X	X		
x ₃		X	X	
x ₄		X	X	X
x ₅			X	X

I	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄
x ₁	X	X		
x ₂	X	X		
x ₃		X	X	
x ₄		X	X	X
x ₅			X	X

I	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄
x ₁	X	X		
x ₂	X	X		
x ₃		X	X	
x ₄		X	X	X
x ₅			X	X

Tab. 2 Další formální koncepty

Další formální koncepty z tabulky (Tab. 25).

$$\langle A_2, B_2 \rangle = \langle \{x_3, x_4\}, \{y_2, y_3\} \rangle,$$

$$\langle A_3, B_3 \rangle = \langle \{x_4, x_5\}, \{y_3, y_4\} \rangle,$$

$$\langle A_4, B_4 \rangle = \langle \{x_4\}, \{y_2, y_3, y_4\} \rangle,$$

$$\langle A_5, B_5 \rangle = \langle \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{y_2\} \rangle,$$

$$\langle A_6, B_6 \rangle = \langle \{x_3, x_4, x_5\}, \{y_3\} \rangle,$$

Konceptuální svaz je množina $\beta(X, Y, I)$ spolu s relací \leq definovanou na $\beta(X, Y, I)$ předpisem

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \text{ právě když } A_1 \subseteq A_2 \text{ (nebo ekvivalentně, } B_2 \subseteq B_1).$$

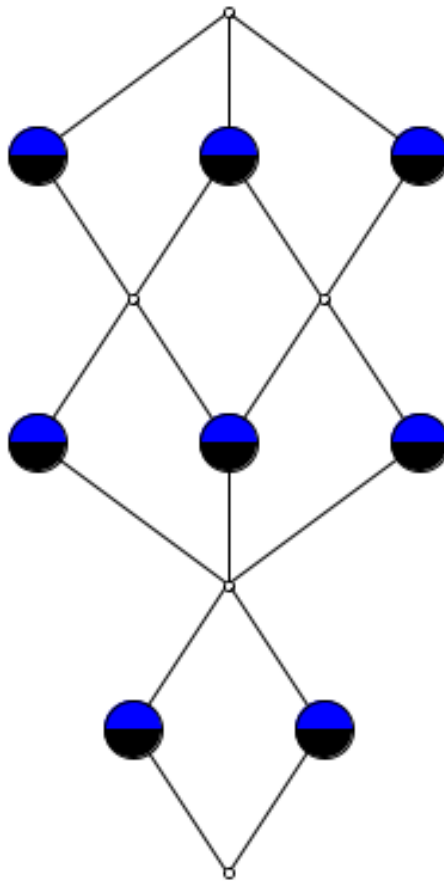
Pro další účely označíme $Int(I) = \{B \subseteq Y \mid \langle A, B \rangle \in \beta(X, Y, I) \text{ pro nějakou } A \subseteq X\}$ tj. $Int(I)$ je množina obsahů všech konceptů z $\beta(X, Y, I)$. Platí, že $B \subseteq Y$ je obsahem nějakého konceptu z $\beta(X, Y, I)$. Podobně značíme $Ext(I)$ rozsahy konceptu z $\beta(X, Y, I)$.

Relace \leq je tedy relací podpojem-nadpojem. Následující věta, tzv. hlavní věta o konceptuálních svazech, popisuje strukturu $\beta(X, Y, I)$. Mimo jiné zdůvodňuje název konceptuální svaz [2], [13].

Příklad 2. Je zde uveden kontext $\langle X, Y, I \rangle$, množina objektů X je tvořena osmi prvky $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ a množina atributů Y je tvořena osmi prvky $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8\}$. Binární relaci I můžeme vidět v následující tabulce:

I	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆	y ₇	y ₈
x ₁	X		X	X	X	X	X	X
x ₂		X	X	X	X	X	X	X
x ₃			X			X	X	X
x ₄				X		X	X	X
x ₅					X		X	X
x ₆						X		X
x ₇							X	
x ₈								X

Tab. 3 Binární relace mezi objekty X a atributy Y



Obr. 28 Konceptuální svaz kontextu $\langle X, Y, I \rangle$

ConceptID	Extent	Intent
c(0)	{z1; z2; z3; z4; z5; z6; z7; z8}	{}
c(1)	{z1; z2; z4; z5; z8}	{y8}
c(2)	{z1; z2; z3; z4; z5; z7}	{y7}
c(3)	{z1; z2; z4; z5}	{y7; y8}
c(4)	{z1; z2; z3; z4; z6}	{y6}
c(5)	{z1; z2; z3; z4}	{y6; y7}
c(6)	{z1; z2; z5}	{y5; y7; y8}
c(7)	{z1; z2; z4}	{y4; y6; y7; y8}
c(8)	{z1; z2; z3}	{y3; y6; y7}
c(9)	{z1; z2}	{y3; y4; y5; y6; y7; y8}
c(10)	{z2}	{y2; y3; y4; y5; y6; y7; y8}
c(11)	{z1}	{y1; y3; y4; y5; y6; y7; y8}
c(12)	{}	{y1; y2; y3; y4; y5; y6; y7; y8}

Obr. 29 Seznam konceptů

Věta 2. (Hlavní věta o konceptuálních svazech). Mějme formální kontext $\langle X, Y, I \rangle$.

1. $\beta(X, Y, I)$ je vzhledem k \leq úplný svaz, ve kterém jsou infima a suprema dána předpisy

$$\bigwedge_{j \in J} \langle A_j, B_j \rangle = \langle \bigcap_{j \in J} A_j, (\bigcap_{j \in J} A_j)^\uparrow \rangle = \langle \bigcap_{j \in J} A_j, (\bigcup_{j \in J} B_j)^\downarrow \rangle,$$

$$\bigvee_{j \in J} \langle A_j, B_j \rangle = \langle (\bigcap_{j \in J} B_j)^\downarrow, \bigcap_{j \in J} B_j \rangle = \langle (\bigcup_{j \in J} A_j)^\uparrow, \bigcap_{j \in J} B_j \rangle.$$

2. Daný úplný svaz $V = \langle V, \sqsubseteq \rangle$ je izomorfní s $\beta(X, Y, I)$, právě když existují zobrazení $\gamma: X \rightarrow V, u: Y \rightarrow V$, pro která je $\gamma(X)$ supremálně hustá v $V, u(Y)$ infimálně hustá v V a $\langle x, y \rangle \in I$ platí, právě když $\gamma(x) \leq u$ (pro každé $x \in X, y \in Y$).

Říkáme, že množina $K \subseteq V$ je supremálně hustá v V , právě když pro každý $v \in V$ existuje $K_v \in K$ tak, že v je supremem množiny K_v ; podobně pro infimální hustotu [2], [13].

4.3.3 Atributové implikace

(Atributová) implikace (nad množinou Y atributů) je výraz tvaru $A \Rightarrow B$, kde $A, B \subseteq Y$.

Pro implikaci $A \Rightarrow B$ a množinu $C \subseteq Y$ říkáme, že $A \Rightarrow B$ platí v C , popř. že C je modelem $A \Rightarrow B$, jestliže platí, že pokud $A \subseteq C$, pak i $B \subseteq C$. Obecněji, pro množinu $M \subseteq 2^Y$ množin atributů a množinu $T = \{A_j \Rightarrow B_j \mid j \in J\}$ implikací říkáme, že T platí v M , popř. že M je modelem T , jestliže $A_j \Rightarrow B_j$ platí v C pro každé $C \in M$ a $A_j \Rightarrow B_j \in T$.

Říkáme, že implikace platí v kontextu $\langle X, Y, I \rangle$ (popř. že je to implikace kontextu $\langle X, Y, I \rangle$), jestliže platí v systému $M = \{\{x\}^\uparrow \mid x \in X\}$ obsahů všech objekt-konceptů (tj. obsahů konceptů tvaru $\{\{x\}^{\uparrow\downarrow}, \{x\}^\uparrow\}$). Dále říkáme, že implikace platí v konceptuálním svazu $\beta(X, Y, I)$, jestliže platí v systému $Int(I)$ všech obsahů.

Věta 3. Atributová implikace platí v $\langle X, Y, I \rangle$, právě když platí v $\beta(X, Y, I)$.

Implikace $A \Rightarrow B$ (sémanticky) plyne z množiny T implikací (zapisujeme $T \models A \Rightarrow B$), jestliže $A \Rightarrow B$ platí v každé $C \subseteq Y$, v níž platí T . Množina T implikací se nazývá:

- uzavřená, jestliže obsahuje každou implikaci, která z ní plyne;
- neredundantní, jestliže žádná implikace z T neplyne z ostatních (tj. nikdy není $T - \{A \Rightarrow B\} \models A \Rightarrow B$).

Množina T implikací kontextu $\langle X, Y, I \rangle$ se nazývá úplná, jestliže z ní plyne každá implikace kontextu $\langle X, Y, I \rangle$. Báze je úplná a neredundantní množina implikací daného kontextu.

Význam předchozích pojmů je následující. Zajímají-li nás implikace platné ve vstupních datech (tj. v kontextu), nezajímají nás implikace všechny. Zejména nás nezajímají triviální implikace, $A \Rightarrow B$, kde $B \subseteq A$, ty můžeme vynechat. Dále je přirozené vynechat ty implikace, které v nějakém přirozeném smyslu plynou z ostatních (proto pojem vyplývání). Při vynechávání bychom měli kontrolovat, zda aktuální množina je stále úplná (tj. všechny implikace z kontextu z ní plynou) a snažit se, aby nebyla redundantní.

Následující tvrzení je důsledkem známého výsledku z teorie relačních databází.

Veta 4. Množina T implikací je uzavřená, právě když pro každé $A, B, C, D \subseteq Y$ platí

1. $A \Rightarrow A \in T$;
2. pokud $A \Rightarrow B \in T$, pak $A \cup C \Rightarrow B \in T$;
3. pokud $A \Rightarrow B \in T$ a $B \cup C \Rightarrow D \in T$, pak $A \cup C \Rightarrow D \in T$ [2], [13].

4.3.4 Vícehodnotové kontexty a konceptuální škálování

Vícehodnotové kontexty (many-valued contexts) jsou rozšířením formálních kontextů, které umožňují reprezentovat vstupní data i s jinými atributy než jen s bivalentními logickými atributy.

Vícehodnotový kontext je čtveřice $\langle X, Y, W, I \rangle$, kde $I \subseteq X \times Y \times W$ je ternární relace taková, že pokud $\langle x, y, v \rangle \in I$ a $\langle x, y, w \rangle \in I$, pak $v = w$.

Prvky množin X, Y a W se nazývají objekty, (vícehodnotové) atributy a hodnoty atributů. Fakt $\langle x, y, w \rangle \in I$ znamená, že objekt x má atribut y s hodnotou w , píšeme také $y(x) = w$. Vícehodnotové kontexty zřejmým způsobem rozšiřují základní kontexty. FCA přistupuje k analýze vícehodnotových kontextů následovně. Vícehodnotový kontext je prostřednictvím vhodného tzv. konceptuálního škálování (conceptual scaling) převeden na základní kontext a ten je poté analyzován.

Škála (scale) pro atribut y vícehodnotového kontextu je kontext $S_y = \langle X_y, Y_y, I_y \rangle$, pro který $y(X) \subseteq X_y$ (kde $y(X) = \{y(x) | x \in X\}$). Prvky množin X_y a Y_y se nazývají škálové hodnoty a škálové atributy.

Jako škálu pro daný atribut vícehodnotového kontextu můžeme použít libovolný kontext splňující podmínky definice. Nicméně škála by měla odrážet význam daného atributu. Pro atributy, vyskytující se běžně ve vícehodnotových kontextech běžně vyskytují, je k dispozici řada standardních škál (např. nominální, ordinální, interordinální, biordinální, dichotomická, atd.).

Jednoduché škálování (plainscaling) je základní procedurou převedení vícehodnotového kontextu na základní kontext.

Je-li $\langle X, Y, W, I \rangle$ vícehodnotový kontext a jsou-li $S_y (y \in Y)$ škály, pak kontext odvozený jednoduchým škálováním je kontext $\langle X, Z, J \rangle$, kde

- $N = \bigcup_{y \in Y} \dot{Y}_y$ ($Y_y = \{y\} \times Y_y$);
- $\langle x, \langle y, z \rangle \rangle \in J$ právě když $y(x) = w$ a $\langle w, z \rangle \in I_y$.

Objekty odvozeného kontextu jsou tedy shodné s objekty vícehodnotového kontextu a množina atributů odvozeného kontextu je disjunktním sjednocením atributů jednotlivých škál. Operaci jednoduchého škálování je možné popsat následovně: v tabulce se označení řádků nemění, místo sloupce s označením y vložíme $|Y_y|$ sloupců označených atributy z Y_y a každou hodnotu $y(x)$ z vícehodnotového kontextu nahradíme řádkem škály Y_y příslušným objektu x [2], [13].

Příklad 3. V tabulce (Tab. 4) je uveden příklad vícehodnotových kontextů:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	12	1	1	0
x_2	3	1	0	1
x_3	7	0	27	1
x_4	24	1	15	0

Tab. 4 Vícehodnotové kontexty

Z tabulky (Tab. 4) je patrné, že atributy y_1 a y_3 nejsou pouze bivalentní logické hodnoty. Jedná se proto o vícehodnotové kontexty a ty je nutné převést na základní kontexty. To je provedeno pomocí konceptuálního škálování (Tab. 5).

	$y_1[1,10]$	$y_1[11,20]$	$y_1[21,30]$	y_2	$y_3[1,10]$	$y_3[11,20]$	$y_3[21,30]$	y_4
x_1	0	1	0	1	1	0	0	0
x_2	1	0	0	1	1	0	0	1
x_3	1	0	0	0	0	0	1	1
x_4	0	0	1	1	0	1	0	0

Tab. 5 Konceptuální škálování

5 MORFOLOGIE OBRAZŮ POMOCÍ FCA A POPISNÉ LOGIKY

V této kapitole je navržen originální způsob Enrichovy popisné logiky s abdukčním uvažováním. Pomocí teorie svazů je použito matematické morfologie, popisné logiky a formální konceptuální analýzy. Také je uvedeno nejlepší vysvětlení pomocí algebraických erozí teorie svazů. Provedeny jsou pomocí formální konceptuální analýzy.

5.1 Úvod

Automatická interpretace obrazu je zkoumáno již několik let. V této kapitole se zaměřujeme na získávání informací z obrazů nebo videosekvencí. K rozpoznání struktur je potřeba konstrukčních znalostí v dané oblasti. Například v lékařských obrazech je třeba mít anatomické znalosti. Popisná logika (description logic – dále uváděna zkratka DL) je důležité paradigma založené na základních znalostech. Tato logika pokrývá mnoho oblastí jako je sémantika webu, robotika, prostorová úvaha a počítačové vidění.

Interpretace scény může využít znalostí ontologie a popisné logiky. Úkolem je odvodit nástroje, schopné zpracovávat kvantitativní informace poskytnuté z obrazů a poznatků ontologie. To se provádí sekvenčním způsobem. Rozpoznávání a interpretace objektů je prováděno z aktuální situace (prostorové konfigurace) zakódované v tvrzeních (Aboxech) DL s terminologickými boxy (Tbox). Formálně vzhledem k teorii pozadí K reprezentující odborné znalosti a vzorec C představuje pozorování problémových oblastí. Abdukční úvaha hledá vysvětlení vzorce D tak, že D je splnitelné s ohledem na K a platí $K \models (D \rightarrow C)(K \cup D \models C)$.

Potenciál přístupu založeného na interpretaci obrazů je založen na dvou příkladech. Prvním z nich je Elsenbroichův. Ten argumentuje tím, že je třeba vyvinout výpočetní nástroje abdukce v souvislosti s ontologií.

Příklad: Elsenbroich bral v úvahu následující lékařské ontologie založené na diagnóze: Předpokládejme, že nemoc třesoucích rukou (shake-hands-disease – SHD), se rozšiřuje tak, že třesete rukou s někým, kdo nese nemoc (shake-hands-disease- virus SHDV). Dále předpokládejme lékařské ontologie obsahující:

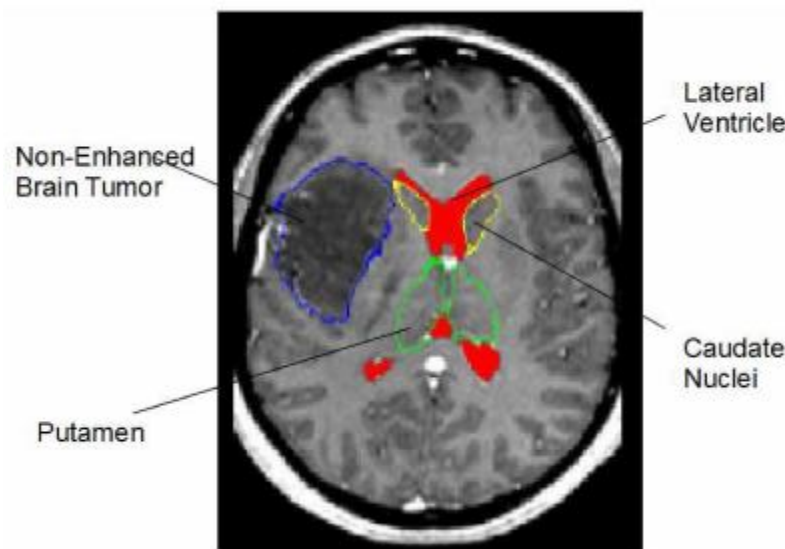
- 1) Role: has_symptom, carries_virus, atd...;
- 2) Koncepty: SHD, SHDV, Laziness (lenost), Pizza_Appetite (chuť na pizzu), Google_Lover (milovník Googlu), atd...;

Soubor axiomů je upřesněn takhle:

- 1) Pokud má někdo SHD onemocnění, pak on nebo ona trpí leností a chutí na pizzu.
- 2) Výzkumník je někdo, kdo má příznaky lenosti, chuť na pizzu a je milovník Googlu.
- 3) Nakonec kdokoliv si třese rukou s někým, kdo má virus SHDV, má onemocnění SHD.

Pokud by nastala potřeba vysvětlit, proč má někdo příznaky lenosti a chuti na pizzu, odpověď by byla následující. Stane se to pokud kdokoliv třese rukou s někým, kdo nese SHDV.

Druhý příklad vychází z interpretace obrazu mozku (Obr. 30).



Obr. 30 Příklad mozkové interpretace obrazu

Předpokládejme, že budeme mít k dispozici teorie popisující mozek, obohacené o prostorové vztahy a řadu algoritmů pro zpracování obrazů. Aboxy budou popsány v následujících kapitolách. Naším úkolem je vysvětlit přítomnost nerozšířeného nádoru (Non-Enhanced Brain Tumor), který se nachází se na okraji mozkové hemisféry, což je daleko od postranní komory. Typická odpověď na tuto otázku je, že obraz představuje onemocnění mozku a nemoc představuje okrajový malý deformující se nádor. Dále budeme přidávat abduktivní úvahy pro DL. Pomocí teorie svazů je zde použito matematické morfologie, DL a formální konceptuální analýzy. Je navrženo nejlepší vysvětlení pomocí algebraické eroze přes formální koncepty z teorie pozadí, která je konstruována s použitím formální konceptuální analýzy [3].

5.2 Popisná logika

V této kapitole je bráno v úvahu, že popisná logika $\varepsilon\mathcal{L}$ a $\varepsilon\mathcal{L}_{gfp}$, patřící do popisné logiky, má vlastnosti konečného modelu. Tato vlastnost je užitečná pro abdukci operátorů, která se bude provádět přes reprezentaci konceptuálních svazů. Ty jsou postaveny v režimu offline použitím nástrojů konceptuální analýzy. Necht' N_C a N_R po párovém rozdělení konečné množiny jmen konceptů a jmen rolí, používáme písmeno R pro jména rolí a písmeno C, D pro koncepty. Symbol \top označuje universální koncept. Množina $\varepsilon\mathcal{L}$ konceptů je nejmenší množina tak, že:

- 1) Každý název konceptu je koncept
- 2) Jestliže C, D jsou koncepty a R název role, pak následující výrazy jsou také koncepty: $C \sqcap D, \exists R. C$.

Interpretace $\mathfrak{I} = (\Delta^{\mathfrak{I}}, \cdot^{\mathfrak{I}})$ se skládá z množiny $\Delta^{\mathfrak{I}}$ nazývaná jako oblast z \mathfrak{I} a funkce $\cdot^{\mathfrak{I}}$, mapující každý koncept C na podmnožinu $C^{\mathfrak{I}}$ z $\Delta^{\mathfrak{I}}$ každá role R podmnožiny $R^{\mathfrak{I}}$ z $\Delta^{\mathfrak{I}} \times \Delta^{\mathfrak{I}}$ tak jako pro všechny koncepty C, D a všechny role R , splňují následující vlastnosti:

- 1) $\top^{\mathfrak{I}} = \Delta^{\mathfrak{I}}$
- 2) $(C \sqcap D)^{\mathfrak{I}} = C^{\mathfrak{I}} \cap D^{\mathfrak{I}}$
- 3) $(\exists R. C)^{\mathfrak{I}} = \{x, | \exists y \text{ s. t. } (x, y) \in R^{\mathfrak{I}}, y \in C^{\mathfrak{I}}\}$

DL znalost \mathcal{K} je složená ze dvou částí TBoxy a ABoxy. TBox \mathcal{T} popisuje terminologii seznamů konceptů, rolí a jejich vztahů. V $\varepsilon\mathcal{L}$, TBoxy obsahují axiomy z typů $C \sqsubseteq D$ a typ $A \equiv C$. Box \mathcal{A} obsahuje tvrzení o objektech. Koncepty tvrzení jsou ve tvaru $a: C$, jež se čtou jako a je C , a role je tvrzení psané $(a, b): R$ a čte se jako a je R související s b .

Interpretace \mathfrak{I} je model DL (Tbox a Abox) axiomů, splňuje-li tento axiom, je to model DL z \mathcal{K} , pokud splňuje každý axiom v \mathcal{K} . Koncept C je splněn, jestliže to připouští model $C^{\mathfrak{I}} \neq \emptyset$.

Mezi nejdůležitější úvahu služeb v DL jsou výpočetně podřadné vztahy mezi koncepty a popisy. Máme dva popisy konceptů C a D . První říká, že D zahrne C , když $C^{\mathfrak{I}} \subseteq D^{\mathfrak{I}}$ pro všechny interpretace \mathfrak{I} . Koncept C je ekvivalentní D ($C \equiv D$), pokud $C \sqsubseteq D$ a $D \sqsubseteq C$. Zařazení vztahů \sqsubseteq je reflexivní a tranzitivní, ale nemusí být antisymetrické. Reflexivita a tranzitivita \sqsubseteq indukuje částečný řád \sqsubseteq_{\equiv} na třídách popisů konceptů

$$[C_1] \sqsubseteq_{\equiv} [C_2], C_1 \sqsubseteq C_2,$$

kde $[C_i] = \{D | C_i \sqsubseteq D\}$ je třída ekvivalence z $C_i (i = 1, 2)$. Zařazení hierarchie by mělo být chápáno na toto indukované uspořádání, v přítomnosti \mathcal{K} . Zařazení je konstruováno s ohledem

$$C_1 \sqsubseteq_{\mathcal{K}} C_2, C_1^{\mathfrak{X}} \sqsubseteq C_2^{\mathfrak{X}}.$$

Pro všechny modely \mathfrak{X} z \mathcal{K} .

Nechť \mathfrak{X} je každý model z \mathcal{K} . Říkáme, že je kompletní na \mathfrak{X} , jestliže pro každé dva kompletní popisné koncepty C a D GCI $C \sqsubseteq D$ má $\mathcal{K} \models (C \sqsubseteq D)$. Pokud \mathcal{K} je kompletní pro \mathfrak{X} , pak je nazýváno jako volný model \mathcal{K} . V následujícím textu budeme předpokládat, že \mathcal{K} je kompletní pro konečný model. To je silný předpoklad.

Předpokládejme, že množina \mathcal{L} všech $\varepsilon\mathcal{L}$ -konceptů, přes \mathcal{K} , zařadila pořadí s ohledem na $\mathcal{K}(\sqsubseteq_{\mathcal{K}})$. Poté musíme indukovat částečné pořadí \sqsubseteq_{\equiv} podílející se podmnožiny $\mathcal{L}/_{\equiv_{\mathcal{K}}}$.

Tvrzení: $(\mathcal{L}/_{\equiv_{\mathcal{K}}}, \sqsubseteq_{\equiv})$ tvoří konečný svaz. Nechť \mathfrak{X} je volný konečný model \mathcal{K} . Pro každé dva popisy konceptů C a D platí $C \sqsubseteq_{\mathcal{K}} D$, $C^{\mathfrak{X}} \sqsubseteq D^{\mathfrak{X}}$ a tedy $C \sqsubseteq_{\mathcal{K}} D, C^{\mathfrak{X}} \sqsubseteq D^{\mathfrak{X}}$. Protože \mathfrak{X} je konečné, existuje mnoho možností $C^{\mathfrak{X}}$ a $D^{\mathfrak{X}}$, od omezující definice konceptů až po ty necyklické. $\mathcal{L}/_{\equiv_{\mathcal{K}}}$ musí být konečné. Také infima a suprema existují.

Nechť $[C], [D], [E] \in \mathcal{L}/_{\equiv_{\mathcal{K}}}$ tři ekvivalence třídy jako $[E] \sqsubseteq_{\equiv} [C]$ a $[E] \sqsubseteq_{\equiv} [D]$. To je ekvivalentní s $E^{\mathfrak{X}} \sqsubseteq C^{\mathfrak{X}}$ a $E^{\mathfrak{X}} \sqsubseteq D^{\mathfrak{X}}$ to znamená $E^{\mathfrak{X}} \sqsubseteq C^{\mathfrak{X}} \cap D^{\mathfrak{X}} = (C \sqsubseteq D)^{\mathfrak{X}}$. Kromě toho $[C \sqcap D]$ je dolní hranice z $[C]$ a $[D]$. Tedy $[C \sqcap D]$ je infimum z C a D .

Za supremum uvažujeme $[E_1], [E_2] \in \mathcal{L}/_{\equiv_{\mathcal{K}}}$, které jsou horní hranice pro $[C]$ a $[D]$. Z $[C] \sqsubseteq_{\equiv} [E_1]$ a $[C] \sqsubseteq_{\equiv} [E_2]$ máme $C^{\mathfrak{X}} \sqsubseteq E_1^{\mathfrak{X}}$ a $C^{\mathfrak{X}} \sqsubseteq E_2^{\mathfrak{X}}$ a tedy $C^{\mathfrak{X}} \sqsubseteq (E_1 \sqcap E_2)^{\mathfrak{X}}$, což znamená $[C] \sqsubseteq_{\equiv} [E_1 \sqcap E_2] = \inf\{[E_1], [E_2]\}$, kde \inf je ekvivalentní třída související s částečným řazením \sqsubseteq_{\equiv} vyvolané z \sqsubseteq a analogicky $[D] \sqsubseteq_{\equiv} \inf\{[E_1], [E_2]\}$. Znamená to, že infimum dvou horních hranic pro $[C]$ a $[D]$ je také horní mez. Z množiny $\mathcal{L}/_{\equiv_{\mathcal{K}}}$ je konečná, infimum

$$\inf\{[E] \in \mathcal{L}/_{\equiv_{\mathcal{K}}} | [C] \sqsubseteq_{\equiv} [E], [D] \sqsubseteq_{\equiv} [E]\}$$

existuje a je supremum z $[C]$ a $[D]$.

Tento důkaz můžeme rozšířit na jakoukoliv skupinu ekvivalence třídy. Lze si všimnout, že volný model \mathfrak{I} z \mathcal{K} svazu $(\mathcal{L}/\equiv_{\mathcal{K}}, \equiv_{\equiv})$ je izomorfní s (S, \subseteq) , kde $S = \{C^{\mathfrak{I}} \mid C \in \mathcal{L}\}$. Odpovídající izomorfismus je $\varphi: \mathcal{L}/\equiv_{\mathcal{K}} \rightarrow S, [C] \mapsto C^{\mathfrak{I}}$.

Příklad: Pomocí syntaxe $\varepsilon\mathcal{L}$, SHD ontologie axiomů jsou následující:

- 1) $\exists has_disease.SHD \sqsubseteq \exists has_symptom.(Laziness \sqcap Pizza_Appetite)$;
- 2) $Researcher \sqsubseteq \exists has_symptom.(Laziness \sqcap Pizza_Appetite \sqcap Google_Lover)$;
- 3) $\exists shake_hands.\exists carries_virus.SHDV \sqsubseteq has_disease.SHD$.

Možný model tohoto TBoxu je následující:

$$\Delta^{\mathfrak{I}} = \{peter, paul, mary, shd, shdv, l, p, g, x, v\}$$

$$SHD^{\mathfrak{I}} = \{shd\}$$

$$SHDV^{\mathfrak{I}} = \{shdv\}$$

$$Laziness^{\mathfrak{I}} = \{l\}$$

$$PizzaAppetite^{\mathfrak{I}} = \{p\}$$

$$GoogleLover^{\mathfrak{I}} = \{g\}$$

$$Researcher^{\mathfrak{I}} = \{peter\}$$

$$HasSymptom^{\mathfrak{I}} = \{(peter, l), (peter, p), (peter, g), (paul, p), (paul, g), (mary, l), (mary, p)\}$$

$$CarriesVirus^{\mathfrak{I}} = \{(mary, shdv), (x, v)\}$$

$$HasDisease^{\mathfrak{I}} = \{(peter, shd), (mary, shd)\}$$

$$ShakeHands^{\mathfrak{I}} = \{(peter, mary)\}.$$

Platí, pokud jsou cyklické definice pojmů povoleny (například $A \equiv B \sqcap \exists r.A$) a největší pevný bod sémantiky je používán spíše než popisný způsob. Rozlišujeme pak množinu primitivních konceptů \mathcal{N}_{prim} a množinu \mathcal{N}_{def} z definovaných konceptů.

Další metodou, užitečnou pro konstrukci konceptuálních svazů, je výpočet nejvíce specifického konceptu z podmnožiny patřící do této oblasti. To je definováno jako

nejmenší popisný koncept obsahující tuto podmnožinu. Tohle se formálně uvádí následujícím způsobem.

Nejvíce specifický koncept: Necht' \mathcal{T} je TBoxem a $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ je model \mathcal{T} . Necht' $X \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ je podmnožinou z domény \mathcal{I} a E je definováno konceptem v \mathcal{T} . Koncept E je nazýván nejvíce specifický koncept z X s ohledem na \mathcal{I} v případě, že platí následující:

- 1) $X \subseteq E^{\mathcal{I}}$;
- 2) Jestliže \mathcal{T}' je konzervativní rozšíření \mathcal{T} , které používá ty samé primitivní jména konceptů a jména rolí, pak pro každý definovaný koncept F v \mathcal{T}' s $X \subseteq F^{\mathcal{I}}$ platí, že $E \sqsubseteq_{\mathcal{T}'} F$.

Nejvíce specifický koncept neexistuje pro libovolné DL. Je zřejmé, že *msc* existuje pro DL \mathcal{EL} s cyklickou definicí konceptu pojmu sémantika největšího pevného bodu (\mathcal{EL}_{gfp}). Pokud bereme na vědomí \mathcal{EL} , následně se musí brát v úvahu sémantika největšího pevného bodu [3].

5.3 Abdukce v popisné logice

Abdukci původně představil Charles Sanders Pierce v pozdních letech 19. století. Odkazuje se na schopnosti odůvodnění z pozorování a vysvětlení. Je základním zdrojem nových poznatků. Je to základní forma úvahy vedle indukce a dedukce. Často je chápána jako forma zpětné úvahy z podmnožiny zpětného pozorování. Abdukční problém je považován za úroveň terminologie a je na něj nahlíženo jako na způsob, jak najít dílčí koncepty daného konceptu. DL \mathcal{ALN} neumožňuje existenciální omezení, které jsou povinné v našich kontextech pro reprezentaci prostorových vztahů mezi objekty scény.

Koncept abdukce: Necht' Γ je libovolné DL, \mathcal{K} základní znalost a C je splnitelné s ohledem na \mathcal{K} . Koncept abdukčního problému, označovaný jako $\langle \mathcal{K}, C \rangle$, spočívá v nalezení množiny $Expla(C)$ komplexních konceptů γ případně jiné DL Γ' tak, že $\mathcal{K} \models \gamma \sqsubseteq C$. Vysvětlující vztah je binární relace $C \triangleright \gamma$, kde význam $C \triangleright \gamma$ je γ vysvětlením C .

Předpokládejme racionalitu přizpůsobenou do kontextu DL

$$LLE_{\mathcal{K}}: \frac{C \equiv_{\mathcal{K}} C \triangleright \gamma}{D \triangleright \gamma}$$

$$\begin{aligned}
RLE_{\mathcal{K}}: & \frac{\gamma \equiv_{\mathcal{K}} \gamma'; C \triangleright \gamma}{C \triangleright \gamma'} \\
E - CM: & \frac{C \triangleright \gamma; \gamma \sqsubseteq_{\mathcal{K}} D}{(C \sqcap D) \triangleright \gamma} \\
E - C - Cut: & \frac{(C \sqcap D) \triangleright \gamma \forall \delta [C \triangleright \delta \Rightarrow \delta \sqsubseteq_{\mathcal{K}} D]}{C \triangleright \gamma} \\
RS: & \frac{C \triangleright \gamma \gamma' \sqsubseteq_{\mathcal{K}} \gamma; \gamma' \not\sqsubseteq_{\mathcal{K}} \perp}{C \triangleright \gamma'} \\
ROR: & \frac{C \triangleright \gamma; C \triangleright \delta}{C \triangleright (\gamma \sqcup \delta)} \\
LOR: & \frac{C \triangleright \gamma; D \triangleright \gamma}{(C \sqcup D) \triangleright \gamma} \\
E - DR: & \frac{C \triangleright \gamma; D \triangleright \delta}{(C \sqcup D) \triangleright \gamma \text{ or } (C \sqcup D) \triangleright \delta} \\
E - R - Cut: & \frac{(C \sqcap D) \triangleright \gamma; \exists \delta [C \triangleright \delta \& \delta \sqsubseteq_{\mathcal{K}} D]}{C \triangleright \gamma} \\
E - Reflexivita: & \frac{C \triangleright \gamma}{\gamma \triangleright \gamma}
\end{aligned}$$

$E - Con_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \not\equiv \neg C(a)$, iff existuje γ takové, že $C \triangleright \gamma$.

Stojí za zmínku, že v souvislosti s poměrně nevýraznou DL $\varepsilon\mathcal{L}$, není umožněna disjunkce a negace, ROR, LOR, E-DR a E- $Con_{\mathcal{K}}$. Racionální předpoklady mohou být uspokojeny pomocí operátorů, jež nepovažujeme za dostatečně omezující.

Uvažujeme koncept abdukčního problému $\langle \mathcal{K}, C \rangle$ s $Expla(C)$ množiny vysvětlení a γ preferované řešení, tj. $C \triangleright \gamma$.

γ je \sqsubseteq - minimální, pokud neexistuje vysvětlení $\zeta \in \langle \mathcal{K}, C \rangle$ takové, že $\zeta \sqsubset_{\mathcal{K}} \gamma$ a $\gamma \not\sqsubseteq_{\mathcal{K}} \perp$.

γ je minimální, pokud není konkrétnější vysvětlení, než γ . Triviální řešení \perp jsou vyloučena. Další minimální omezení pro abdukcí v DL může být nalezeno v analýze složitosti v konkrétním případě DL $\varepsilon\mathcal{L}$ a $\varepsilon\mathcal{L}^{++}$.

Když je problém abdukce omezen názvem konceptu, množina všech vysvětlujících řešení je zřejmá. To je přesně množina jmen konceptů zahrnutých do pozorování C . Představuje

klesající hierarchii, od konceptů vysvětlení. Máme zájem o komplexní koncepty, které nejsou definovány v Tboxech a nejsou explicitně zastoupeny v hierarchii zařazení.

Příklad: V kontextu z příkladu SHD, vzhledem ke konceptu $\exists has_symptom$. ($Laziness \sqcap Pizza_Appetite$), pokud je omezení na GCI v Tboxu a řešení získané prostým zpětným řetězením na klasifikaci konstrukce může být $\exists shake_hands. \exists carries_virus. SHDV$. Hledáme pro komplexní $\varepsilon\mathcal{L}$ -koncepty a to náš přístup umožňuje pro abdukcí následujících komplexních konceptů:

$$\exists shake_{hands}. (\exists carries_{virus}. SHDV \sqcap \exists has_{disease}. SHD \sqcap \exists has_{symptom}. Pizza_{appetite} \sqcap has_{symptom}. Laziness).$$

Za zmínku stojí, že tento koncept není pojmenován, proto náš přístup přesahuje prosté zpětné řešení v klasifikaci konstrukce. Jedná se o největší počet jednotlivých konceptů, který splňuje minimální omezení [3].

5.4 Použití FCA pro tvorbu algoritmu

Klíčovým problémem u formálního kontextu je efektivně vypočítat základní formální konceptuální svaz. To je množina všech implikací v kontextu. Lze použít přístupu „hrubé síly“ výčtem všech možných implikací množin $2^{2^{|M|}}$, což je velmi časově náročné a vytváří se redundantní implikace množin. Méně naivní strategie může využít skutečnosti:

pro všechny podmnožiny Y z M , vytvoří implikace $Y \rightarrow \alpha\beta(Y)$, vždy platí v \mathbb{K} .

V případě $Y_1 \rightarrow Y_2$ platí v \mathbb{K} , pak $Y_2 \subseteq \alpha\beta(Y_1)$.

Můžeme pak definovat implikace množiny stanovené výčtem všech ($2^{2^{|M|}}$) podmnožiny Y z M a vytvořit implikace $Y \rightarrow \alpha\beta(Y)$. Nicméně tento přístup stále vytváří redundantní výsledky a ty činí neefektivní zejména rozsáhlé aplikace. Přirozenou otázkou je tedy, zda existuje implikace množiny, která je neredundantní, a z níž všechny implikace v daném kontextu můžeme odvodit. Následující definice budou užitečné pro konstrukci algoritmů konceptuálních svazů.

Vzhledem k tomu, že formální kontext \mathbb{K} , množina implikací β definuje základ pro implikace množiny v \mathbb{K} ($imp(\mathbb{K})$), je-li:

- 1) Každá implikace $Y_1 \rightarrow Y_2$ z β platí v \mathbb{K} ;
- 2) Kompletní, každá implikace $Y_1 \rightarrow Y_2$ platí v \mathbb{K} , mohou být odvozeny z β
- 3) Minimální, nestriktní podmnožina β je kompletní.

Konkrétně Guigues-Duquenne definováno jako $\beta = \{Y \rightarrow \alpha\beta(Y) \mid Y \text{ je pseudo záměr } \mathbb{K}\}$, kde pseudo záměr formálního kontextu \mathbb{K} je rekurzivně definován jako množina Y atributů splňujících $Y \neq \alpha\beta(Y)$ a $\alpha\beta(\tilde{Y}) \subseteq Y$ pro každý pseudo záměr $\tilde{Y} \subset Y$.

Efektivní přístup k pojmu konceptuální svazy je výčet pseudo záměrů \mathbb{K} v letickém pořadí, které je definováno takto.

Lektické pořadí je pořadí lineární na množiny M . To je definováno následovně:

stanovené libovolné striktní pořadí $<$ na množině $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ o attributech, říkájí $m_1 < \dots < m_n$. Necht' $Y_1, Y_2 \subseteq M$ jsou dvě množiny atributů. Definováno

$$Y_1 <_i Y_2 \text{ iff } \exists m_i \in Y_2 \setminus Y_1 \text{ a } Y_1 \cap \{m_1, \dots, m_{i-1}\} = Y_2 \cap \{m_1, \dots, m_{i-1}\}.$$

Lektické pořadí je sjednocení všech $<_i$ pro $i = 1, \dots, n$. Algoritmus na obrázku (Obr. 31) vypočítá kmen základny pomocí letického výčtu pseudo záměrů \mathbb{K} .

```

Require: formal context  $\mathbb{K} = (G, M, I)$ 
Ensure:  $\mathcal{B}$  - the stem base
 $\mathcal{B} := \emptyset$ 
Define a strict total order on attributes, e.g.  $m_1 < m_2 < \dots < m_n$ 
Encode attribute sets as bit-vectors of length  $|M|$ , e.g.  $\{m_1, m_4, m_5\}$  as  $[1, 0, 0, 1, 1, 0, 0]$  for an attribute set of cardinality
7.
 $Y := [0, \dots, 0]$ 
loop
  if  $Y \neq \alpha\beta(Y)$  then
     $\mathcal{B} := \mathcal{B} \cup \{Y \rightarrow \alpha\beta(Y)\}$ 
  end if
   $k := |M| + 1$ 
  while ( $k \neq 0$  or ( $Y[k] = 0$  and  $\mathcal{B}(Y + k)[i] = 1, \forall i > k$ )) do
     $k := k - 1$ 
  end while
  if  $k = 0$  then return  $\mathcal{B}$ , exit
  end if
   $Y := \mathcal{B}(Y + k)$ 
end loop

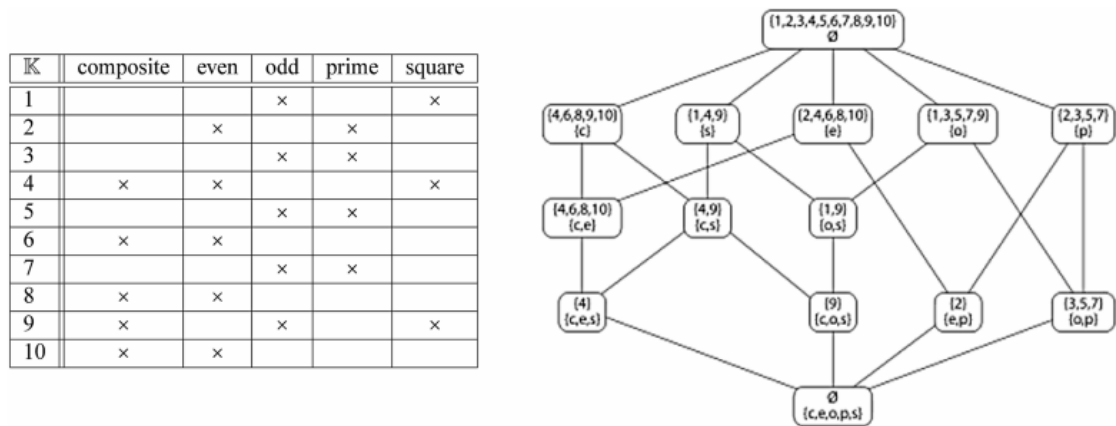
```

Obr. 31 Algoritmus pro výpočet kmene základny

V tomto algoritmu $Y + i$ činí nastavení i -tého bitu na 1 a všechny následovné bity na 0, množiny, to je $Y[i] := 1$ a $\forall j > i, Y[j] := 0$. $\beta(Y)$ použití implikací na atributy množin, například pro $\beta = (\{m_1\} \rightarrow \{m_1, m_4, m_5\})$ a $Y = \{m_1, m_2, m_3\}$,

$$\beta(Y) = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}.$$

Příklad: Klasický příklad pro ilustraci je definice algoritmu uvedeného výše. Kromě toho, je tato metoda dále použita v celé kapitole. Formální kontext a související konceptuální svaz je zobrazen na obrázku (Obr. 32).



Obr. 32 Jednoduchý příklad konceptuálního svazu a tabulka formálního kontextu

Spodní prvek je $(\emptyset, \{composite, even, odd, prime, square\})$. Jednotlivé části jsou $(\{4\}, \{composite, even, square\})$, $(\{9\}, \{composite, odd, square\})$, $(\{2\}, \{even, prime\})$, $(\{3,5,7\}, \{composite, odd, square\})$. $(\{1,9\}, \{odd, square\})$ je nástupcem $(\{9\}, \{composite, odd, square\})$. $(\{9\}, \{composite, odd, square\})$ je množina $\{(\{4,9\}, \{composite, square\}), (\{1,9\}, \{odd, square\})\}$.

Vypočtená Guigues-Duquenne základna používá algoritmus představený výše:

- 1) $\{composite, odd\} \rightarrow \{composite, odd, square\}$;
- 2) $\{even, square\} \rightarrow \{composite, even, square\}$;
- 3) $\{even, odd\} \rightarrow \{composite, even, odd, prime, square\}$;
- 4) $\{composite, prime\} \rightarrow \{composite, even, odd, prime, square\}$;
- 5) $\{odd, square\} \rightarrow \{composite, even, odd, prime, square\}[3]$;

5.5 Užití FCA v popisné logice

Popisná logika a formální konceptuální analýza se nejprve vyvíjely nezávisle. Nyní je rozdíl mezi oběma teoriemi výrazně nižší. Na jedné straně se vědci FCA pokoušejí sloučit formální kontexty s komplexními konstrukcemi problémů v DL. Na druhé straně se vědci DL pokoušejí využít výhod FCA pro řešení nestandardních problémů.

Pro naše potřeby jsou vybrány $\varepsilon\mathcal{L}$ -koncepty, které nejsou zařazeny v hierarchii. Je to přirozený způsob, stejně jako je hledání místa úplných svazů konceptů odvozených z teorie pozadí. Proto konstrukce, jako konceptuální svazy, používají nástrojů FCA. Nástroje FCA jsou rozšířeny na relační struktury vyjádřené v jazyku DL. Spojení mezi FCA a DL je řízeno prostřednictvím indukovaného kontextu. To je formálně uvedeno následovně:

$$G := \Delta^{\mathcal{I}} \text{ doména konečného modelu } \mathcal{I}$$

$$M := (m_1, \dots, m_n)$$

$$I := \{(d, m) \mid d \in m^1\}$$

V tom, co předchází m_1, \dots, m_n označujeme koncepty definované v pevném TBoxu \mathcal{T} . G odpovídá oblasti modelu posuzovaného TBoxu \mathcal{T} . Distel navrhl vícestupňový průzkumný algoritmus pro kontrolu možného plýtvání v dané terminologické základně vyjádřené DL $\varepsilon\mathcal{L}$. Dále se spoléháme na podobné konstrukce algoritmu. Tento algoritmus je shrnut na obrázku (Obr. 33).

```

Require: finite model  $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \mathcal{I})$ ,  $\mathcal{N}_{prim}$ -the set of primitive concepts
Ensure:  $\mathcal{S}$  - a base for the GCIs holding in the model  $\mathcal{I}$ 
 $M_0 := \mathcal{N}_{prim}$ 
 $\mathbb{K}_0 :=$  the context induced by  $M_0$  and  $\mathcal{I}$ 
 $\mathcal{S}_0 := \emptyset$ ,  $\Pi := \emptyset$ ,  $P_0 := \emptyset$ ,  $k := 0$ 
while  $P_k \neq \emptyset$  do
   $\Pi_{k+1} := \Pi_k \cup \{P_k\}$ 
   $M_{k+1} := M_k \cup \{\exists r.msc((\cap_{U \in P_k} U)^{\mathcal{I}}) \mid r \in \mathcal{N}_R\}$ 
   $\mathcal{S}_{k+1} := \{\{C\} \rightarrow \{D\} \mid C, D \in M_k, C \sqsubseteq D\}$ 
   $k := k + 1$ 
  if  $M_k = M_{k-1} = P_k$  then
     $P_k := \emptyset$ 
  else
     $P_k :=$  lexically next set of attributes that respects all implications in  $\mathcal{S}_k$  and  $\{P_j \rightarrow \beta\alpha_k(P_j) \mid 1 \leq j \leq k\}$  (with  $\beta\alpha_k$  meaning that the derivation operators are applied w.r.t the context  $\mathbb{K}_k$ )
  end if
end while

```

Obr. 33 Algoritmus pro výpočet základny pro obecný koncept v daném konečném modelu

Volný konečný model elementů je brán jako objekt a \mathcal{EL} koncepty jako atributy. Klíčovým bodem je pak generování volného modelu.

Příklad: S ohledem na příklad SHD, implikace základny vyplývající z algoritmu (Obr. 33) je znázorněna na obrázku (Obr. 34). Odpovídající svaz je znázorněn na obrázku (Obr. 35).

Zařazení je následující:

$$\text{Researcher} \sqcap \exists \text{CarriesVirus}. \perp \sqsubseteq \exists \text{HasDisease}. \text{SHD}$$

$$\sqcap \exists \text{HasSymptom}. \text{GoogleLover} \sqcap \exists \text{ShakeHands}. \exists \text{CarriesVirus}. \text{SHDV}$$

Z první implikace je konstruován kmen základny:

$$\begin{aligned} \text{Researcher} \sqsubseteq_{\mathcal{K}} \exists \text{HasDisease}. \text{SHD} \sqcap \exists \text{HasSymptom}. \text{GoogleLover} \\ \sqcap \exists \text{ShakeHands}. \exists \text{CarriesVirus}. \text{SHDV} \end{aligned}$$

Podle následujícího pravidla:

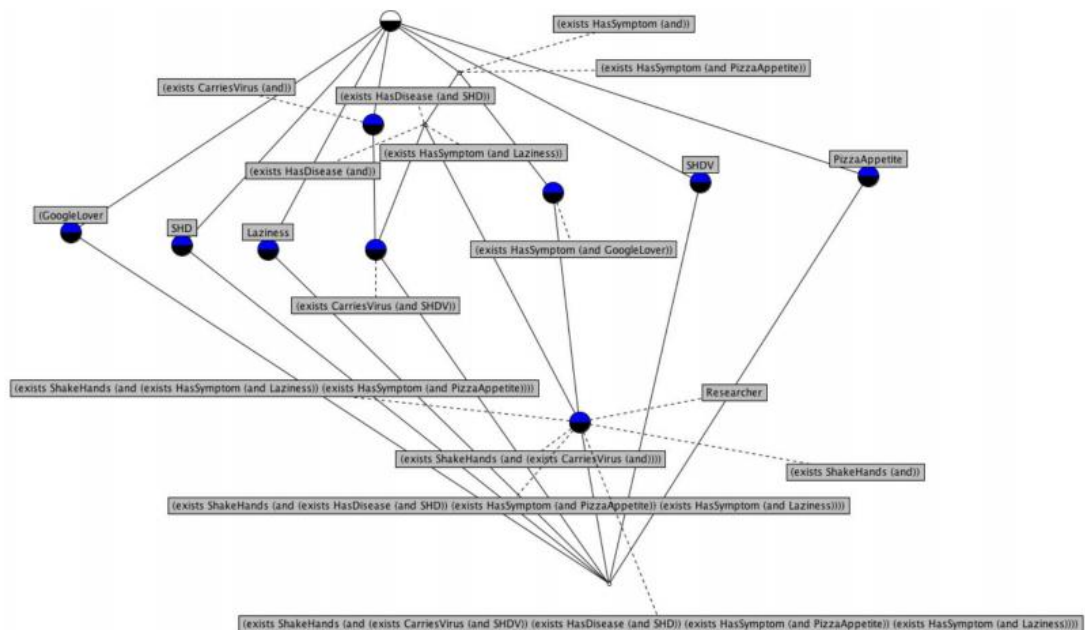
$$\frac{A \sqsubseteq_{\mathcal{K}} B}{A \sqcap C \sqsubseteq_{\mathcal{K}} B}$$

```
((and Researcher ==> (and (exists HasDisease (and SHD)) (exists HasSymptom (and GoogleLover)) (exists ShakeHands (and (exists CarriesVirus (and SHDV)))))))
((and PizzaAppetite SHDV) ==> Nothing)
((and SHD SHDV) ==> Nothing)
((and PizzaAppetite SHD) ==> Nothing)
((and Laziness SHDV) ==> Nothing)
((and Laziness PizzaAppetite) ==> Nothing)
((and Laziness SHD) ==> Nothing)
((and GoogleLover SHDV) ==> Nothing)
((and GoogleLover PizzaAppetite) ==> Nothing)
((and GoogleLover SHD) ==> Nothing)
((and GoogleLover Laziness) ==> Nothing)
((and (exists HasDisease (and)) ==> (and (exists HasDisease (and SHD))))
((and (exists HasSymptom (and)) ==> (and (exists HasSymptom (and PizzaAppetite))))
((and (exists CarriesVirus (and)) SHDV) ==> Nothing)
((and (exists CarriesVirus (and)) PizzaAppetite) ==> Nothing)
((and (exists CarriesVirus (and)) SHD) ==> Nothing)
((and (exists CarriesVirus (and)) Laziness) ==> Nothing)
((and (exists ShakeHands (and)) ==> (and (exists ShakeHands (and (exists CarriesVirus (and SHDV)))) Researcher))
((and (exists CarriesVirus (and SHDV)) ==> (and (exists HasDisease (and SHD))))
((and (exists HasSymptom (and PizzaAppetite)) SHDV) ==> Nothing)
((and (exists HasSymptom (and PizzaAppetite)) PizzaAppetite) ==> Nothing)
((and (exists HasSymptom (and PizzaAppetite)) SHD) ==> Nothing)
((and (exists HasSymptom (and PizzaAppetite)) Laziness) ==> Nothing)
((and (exists HasSymptom (and PizzaAppetite)) GoogleLover) ==> Nothing)
((and (exists CarriesVirus (and)) (exists HasSymptom (and PizzaAppetite))) ==> (and (exists CarriesVirus (and SHDV))))
((and (exists HasSymptom (and SHDV)) ==> Nothing)
((and (exists CarriesVirus (and PizzaAppetite))) ==> Nothing)
((and (exists HasSymptom (and SHD)) ==> Nothing)
((and (exists CarriesVirus (and SHD)) ==> Nothing)
((and (exists HasSymptom (and Laziness)) ==> (and (exists HasDisease (and SHD))))
((and (exists HasDisease (and SHDV)) ==> Nothing)
((and (exists HasDisease (and PizzaAppetite)) ==> Nothing)
((and (exists HasDisease (and Laziness)) ==> Nothing)
((and (exists CarriesVirus (and Laziness)) ==> Nothing)
((and (exists HasDisease (and GoogleLover)) ==> Nothing)
((and (exists HasDisease (and SHD)) (exists HasSymptom (and GoogleLover))) ==> (and (exists ShakeHands (and (exists CarriesVirus (and SHDV)))) Researcher))
((and (exists CarriesVirus (and GoogleLover))) ==> Nothing)
((and (exists HasDisease (and (exists HasSymptom (and PizzaAppetite)))) ==> Nothing)
((and (exists HasSymptom (and (exists HasSymptom (and PizzaAppetite)))) ==> Nothing)
((and (exists CarriesVirus (and (exists HasSymptom (and PizzaAppetite)))) ==> Nothing)
((and (exists HasDisease (and (exists CarriesVirus (and)))) ==> Nothing)
((and (exists HasSymptom (and (exists CarriesVirus (and)))) ==> Nothing)
((and (exists CarriesVirus (and (exists CarriesVirus (and)))) ==> Nothing)
((and (exists CarriesVirus (and SHDV)) (exists ShakeHands (and (exists CarriesVirus (and SHDV)))) Researcher) ==> Nothing)
((and (exists ShakeHands (and (exists CarriesVirus (and SHDV)))) (exists ShakeHands (and SHDV))) ==> Nothing)
((and (exists ShakeHands (and (exists CarriesVirus (and SHDV)))) (exists ShakeHands (and PizzaAppetite))) ==> Nothing)
((and (exists ShakeHands (and (exists CarriesVirus (and SHDV)))) (exists ShakeHands (and SHD))) ==> Nothing)
((and (exists ShakeHands (and (exists CarriesVirus (and SHDV)))) (exists ShakeHands (and Laziness))) ==> Nothing)
((and (exists ShakeHands (and (exists CarriesVirus (and SHDV)))) (exists ShakeHands (and GoogleLover))) ==> Nothing)
((and (exists ShakeHands (and (exists CarriesVirus (and SHDV)))) (exists ShakeHands (and (exists HasSymptom (and GoogleLover)))) Researcher) ==> Nothing))
```

Where the concept Nothing which approximates the \perp concept corresponds to:

```
((and SHDV Researcher PizzaAppetite SHD Laziness GoogleLover (exists HasDisease All) (exists HasSymptom All) (exists CarriesVirus All) (exists ShakeHands All))
```

Obr. 34 Implikace základny odvozené z příkladu SHD



Obr. 35 Konceptuální svaz indukovaný podle SHD ontologie [3].

5.6 Abdukce operátorů z matematické morfologie na úplné svazy

V této kapitole bude popsáno, jak lze využít základních morfologických operací v logickém prostředí. Morfologické logiky lze využít k přiblížení nebo pochopení problémů. Jelikož je využíváno algebraické struktury matematické morfologie, její hlavní myšlenkou je najít centrální část teorie po sobě jdoucích erozí. Lze vycházet ze dvou základních vztahů. Nejdůležitější jsou úplné svazy, na které jsou definovány operátory. Budeme brát v potaz úplné svazy tvořené z jednoho pevného konečného modelu. Nyní si uvedeme základní matematické rovnice z matematické morfologie.

Nechť (L, \leq) a (L', \leq') jsou dva úplné svazy, ty nemusí být stejné. Všechny následující definice platí pro matematickou morfologii v úplných svazech.

Operátor $\delta : L \rightarrow L'$ je dilatace, pokud supremum: $\forall (x_i) \in L, \delta(\vee_i x_i) = \vee_i' \delta(x_i)$, kde \vee značí supremum spojené s \leq a \vee' související s \leq' .

Operátor $\epsilon : L' \rightarrow L$ je erose, pokud infimum $\forall (x_i) \in L', \epsilon(\wedge_i' x_i) = \wedge_i \epsilon(x_i)$, kde \wedge a \wedge' značí infimum spojené s \leq a \leq' .

Zde budeme uvažovat operátory na úplných svazech \mathbb{C} definované z (G, M, I) .

Stejně jako v případě úplných svazů definujeme dilataci a erozi v pojetí úplných svazů jako operace zaměřující supremum a infimum. Mohli bychom uvažovat o podmnožině G s cílem najít vysvětlení v M . To je provedeno pomocí eroze. Ta hledá podmnožinu, která by vysvětlila podmnožinu X . Můžeme si všimnout, že od částečného uspořádání v konceptuálních svazech mohou být vyjádřeny ekvivalentně jako inkluze na G nebo M . Navrhované konstrukce na G přímo indukují cestu úvahy na M . Dále jsou navrhovány dva přístupy definice eroze na \mathbb{C} .

První z nich se skládá s morfologické eroze založené na strukturním elementu definovaného jako základní okolí prvků G nebo jako binární relace mezi prvky G . Taková okolí mohou být definována jako koule o poloměru 1. To je vyjádřeno jako provádění po sobě následujících erozí tak, aby bylo možno odvodit poslední neprázdné eroze.

Druhý přístup spočívá v přímém definování poslední eroze, jež se používá pro účely generování. To znamená přejít přímo k poslednímu kroku konstrukce navržené v prvním přístupu [3].

5.6.1 Eroze zpovzdálí a blízkého okolí

Aby bylo možné definovat explicitní operace na konceptuální svaz, bude využíváno zejména erozí a dilatací, které zahrnují strukturní prvek. To je binární relace mezi b a prvky G . Pro $g \in G$, značíme $b(g)$ sadu prvků G ve vztahu s g . Pro instance b může představovat systém okolí G nebo vztah vzdálenosti. Pro vzdálenost d mezi prvky G mohou být strukturní prvky definovány jako koule této vzdálenosti. Na několik vzdáleností by mohly být použity. To je uvedeno v následujícím příkladu.

$P(G)$ definována z G s funkcí výšky ℓ , definované jako supremum délek všech řetězců, spojí prázdnou proměnnou do uvažovaného prvku. Tato funkce je striktně monotónní a splňuje následující vlastnosti. Jestliže Y pokrývá X . To znamená $X \subset Y$ a $\nexists Z$ tak, že $X \subset Z \subset Y$. Pak $\ell(y) = \ell(X) + 1$. Proto tato funkce dodává konceptuální svazy s odstupňovanou strukturou svazů. V obecných odstupňovaných svazech může být pseudometrika definována jako $d(X, Y) = \ell(x) + \ell(Y) - 2\ell(X \wedge Y)$, kde \wedge značí infimum spojené s částečně uspořádanými svazy. Funkce ℓ je prostě každá podmnožina. To znamená $\forall X \in P(G), \ell(X) = |X|, Y$ pokrývá X , což znamená Y má právě jeden prvek větší než X a d , které může být vyjádřeno jako

$$\forall (X, Y) \in P(G)^2, d(X, Y) = |X| + |Y| - 2|X \cap Y| = |X \cup Y| - |X \cap Y| = |X \Delta Y|$$

To je jeden příklad ze vzdáleností, použitelný na \mathbb{C} . Jednou z jeho nevýhod je však, je však jeho silná závislost na zrnitosti popisů koncepce v základní ontologii.

Dále budeme předpokládat jakoukoliv vzdálenost d a definovat okolí každého prvku G jako kouli d o poloměru jedna se středem v g :

$$\forall g \in G, b(g) = \{g' \in G | d(\{g\}, \{g'\}) \leq 1\}.$$

To co následuje, platí bez ohledu na vzdálenost pro strukturní element b , definovaný jako koule o zvolené vzdálenosti. Morfologická dilatace podmnožiny X z G s ohledem na b vyjádřena jako

$$\delta_b(X) = \{g \in X | b(g) \cap X \neq \emptyset\}.$$

Morfologická eroze X je vyjádřena jako

$$\varepsilon_b(X) = \{g \in G | b(g) \subseteq X\}.$$

Užívání b odvozené ze vzdálenosti je zajímavé v souvislosti s abdukci, kde většina centrálních částí X bude muset být definována. Eroze je pak vyjádřena následujícím způsobem:

$$\varepsilon^n(X) = \{g \in X | d(\{g\}, X^c) > n\}.$$

X^c označuje doplněk X v G . Musíme brát na vědomí $\varepsilon(X) = \varepsilon^l(X)$ a mají $\varepsilon^0(X) = X$. Zde je G diskrétní konečný prostor. Proto jsou brány pouze celočíselné hodnoty n . Obecněji řečeno ε^n označuje iterativní aplikaci ε , n -krát.

Všechny vlastnosti matematické morfologie platí. Ty nejdůležitější jsou následující:

- 1) Eroze zaměňována s infimem. To znamená:

$$\forall (X, X') \in P(G)^2, \varepsilon(X \cap X') = \varepsilon(X) \cap \varepsilon(X').$$

- 2) Pouze zařazení platí pro supremum:

$$\forall (X, X') \in P(G)^2, \varepsilon(X) \cup \varepsilon(X') \subseteq \varepsilon(X \cup X').$$

- 3) Jestliže $g \in b(g)$, pak eroze:

$$\forall X \in P(G), \varepsilon_b(X) \subseteq X.$$

- 4) Interativní vlastnost:

$$\varepsilon^n(\varepsilon^m(X)) = \varepsilon^{n+m}(X).$$

Provádění po sobě jdoucích erozí pak vede k menšímu a menšímu výsledku. Tato vlastnost se používá k definování vysvětlení redukovaného výsledku získaného erozí.

- 5) Důležitý pojem je jedna z adjunkcí. Pár operátorů (ε, δ) tvoří adjunkce pokud

$$\forall x \in L, \forall y \in L', \delta(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \varepsilon(y).$$

Jestliže (ε, δ) je adjunkce, pak ε eroze a δ dilatace. Z toho vyplývá, že δ zachová nejmenší prvek a ε zachová největší prvek. V konkrétním případě $(\varepsilon_b, \delta_b)$ je adjunkce. Tento koncept je ekvivalentní s Galoisovou konexí obrácením pořadí na druhém svazu. Pro formální koncept $(X, Y), X \subseteq \beta(Y) \Leftrightarrow Y \subseteq \alpha(X)$. Proto operátory odvozené z FCA lze také brát jako pojmy matematické morfologie [3].

5.6.2 Poslední neprázdna eroze

Jak je uvedeno ve výrokové logice, eroze může být použita k nalezení různých vysvětlení. Myšlenkou bylo najít hlavní část vzorce jako nejlepší vysvětlení. V této kapitole jsou navrženy podobné myšlenky, ovšem jsou přizpůsobené kontextu konceptuálních svazů definovaných pomocí eroze.

Pro každé $X \subseteq G$ tak, že $\exists Y \in M, (X, Y) \in \mathbb{C}$, definujeme její poslední erozi jako

$$\varepsilon_t(X) = \varepsilon^n(X) \Leftrightarrow \{\varepsilon^n(X) \neq \emptyset, \text{ a } \forall m > n, \varepsilon^m(X) = \emptyset\}$$

Tato poslední neprázdna eroze definuje podmnožiny G , které jsou nejvzdálenější z doplňku X na vzdálenosti d . Jinými slovy definuje nejvíce specifický koncept, který zahrnuje rozsah X .

Nechť C je $\varepsilon\mathcal{L}$ -koncept, β odvozený operátor a ε_ℓ poslední neprázdna eroze. Potom γ z C je definována z poslední neprázdne eroze jako

$$C \triangleright \ell ne \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \beta(\gamma) \subseteq \varepsilon_\ell(\beta(C)).$$

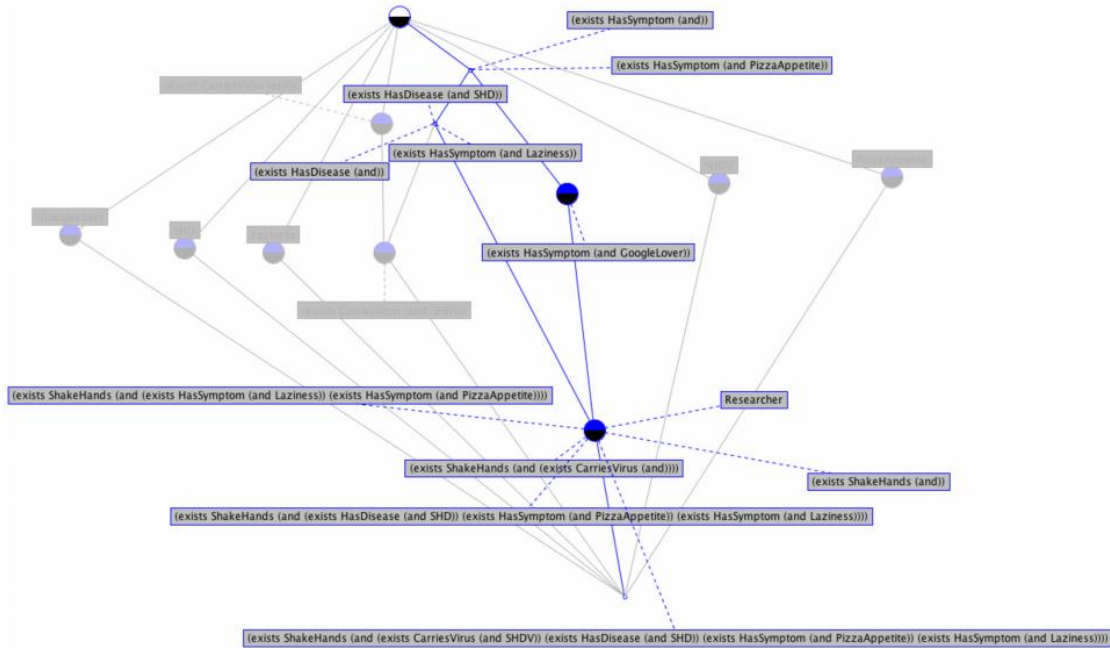
Pokud hypotéza \mathcal{H} musí být zavedena, pak se tato definice mění následovně

$$C \triangleright \ell ne \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \beta(\gamma) \subseteq \varepsilon_\ell(\beta(\mathcal{H}) \cap \beta(C)).$$

V této rovnici si lze všimnout, že ve skutečnosti definuje sadu nejlepších možných vysvětlení. Tato sada může být změněna. Instance dilatace $\beta(\gamma)$ pomocí koule o vzdálenosti d a velikosti menší než n vždy vede k podskupině $\beta(C)$. Centrální část může

být interpretovaná jako podmnožina X z G , jež lze změnit nejvíce, mezitím $\alpha(X)$ zůstává zahrnuta podle C .

Interpretace konceptuálních svazů je následující: počínaje podmnožinou, kterou je potřeba vysvětlit, provedením postupné eroze, klesá dolů ve svazu (Obr. 36).



Obr. 36 Erozní cesta spojená s SHD abdukčním problémem [3]

5.6.3 Poslední souladná eroze

Další myšlenkou zavedení omezení \mathcal{H} je to narušit, jestliže zůstane konzistentní s C . To vede k druhému vysvětlujícímu vztahu.

Nechť C je $\varepsilon\mathcal{L}$ -koncept \mathcal{H} , udělené před omezením a β odvozený operátor. Výhodné vysvětlení γ z C je definováno z poslední souladné eroze jako

$$C \triangleright {}^{\ell_C} \gamma \stackrel{def}{\iff} \beta(\gamma) \subseteq \varepsilon_{\ell_C}(\beta(\mathcal{H}), \beta(C)) \cap \beta(C).$$

Kde ε_{ℓ_C} je poslední souladná eroze definována jako

$$\varepsilon_{\ell_C}(\beta(\mathcal{H}), \beta(C)) = \varepsilon^n(\beta(\mathcal{H})).$$

Kde $n = \max\{k \mid \varepsilon^k(\beta(\mathcal{H})) \cap \beta(C) \neq \emptyset\}$.

Tato definice má jiný výklad. Zde musíme brát v potaz erozi z $\beta(\mathcal{H})$ samostatně. Což znamená, že při pohledu na model je \mathcal{C} nejvíce omezené.

5.6.4 Přímá definice poslední neprázdné eroze

Nechť $X \in P(G)$ je podmnožina, kterou je třeba vysvětlit. Jestliže X není konceptuální svaz, pak je třeba nejdříve vypočítat $\beta\alpha(X)$. Tedy $(\beta\alpha(X), \alpha(X))$ je formální koncept. To znamená, že $\in \mathbb{C}$. Pojem nejvíce specifikovaný koncept může být také použit na kteroukoliv vhodnou alternativu závislou na aplikaci. Předpokládejme, že X je ve svazu. Chceme-li definovat poslední neprázdnou erozi X . Je třeba počítat neprázdné podmnožiny z X , které jsou ve svazu a zároveň jsou minimem. To je formulováno následovně:

Nechť X je jakýkoliv prvek $P(G)$ tak, že $\exists Y \in P(M), (X, Y) \in \mathbb{C}$. Předpokládejme $X \neq \emptyset, X \neq T$. Poslední neprázdná eroze X je definována jako

$$\varepsilon_\ell(X) = \cup \{X' \in P(G) \setminus \emptyset \mid \exists Y' \in P(M), (X', Y') \in \mathbb{C}, X' \subseteq X, X' \text{ minimal}\}.$$

Všimněte si, že podmnožiny X jsou části (nástupci nejmenšího prvku \perp). Minimální koncept v této rovnici můžeme definovat různými způsoby, což umožňuje pružnost v definici. Například můžeme vzít v úvahu dvě omezení:

- 1) Mohutnost označená jako $|\cdot|$ - minimální. Je silné omezení vylučující velké množství řešení. To způsobuje nevýhodu, protože tvorba operátoru eroze závisí na modelu.
- 2) \subseteq - minimální. Je méně omezující než mohutnost a proto je méně závislé na změně modelu.

Nyní definujeme vysvětlení z $\varepsilon_\ell(X)$. Může být provedeno jedním z následujících způsobů:

- 1) Vybereme γ tak, že $\beta(\gamma) \subseteq \varepsilon_\ell(X)$ ($\beta(\gamma) \in P(G)$), ale $\beta(\gamma)$ není nutně koncept svazu od spojení prvků \mathbb{C} . Není vždy v \mathbb{C} a nejvíce specifické koncepty včetně spojení podle $\beta\alpha$ mohou být příliš velké. Kromě toho chceme uložit omezení na minimální mohutnost.
- 2) $\beta(\gamma) \subseteq \varepsilon_\ell(X)$ tak, že $\exists Y \in P(M), (\beta(\gamma), Y)$ je formální koncept.
- 3) $\beta(\gamma) = f(\varepsilon_\ell(X))$, kde f je volbou funkce mezi podmnožinou X' . Tím zaručuje omezení minima.

Platí následující vlastnosti:

- ε_ℓ je rostoucí operátor;

- ε_ℓ není rozsáhlý operátor;
 - ε_ℓ přechází z infima
- 4) ε_ℓ zachovává největší prvek

Uvažujme jednoduchý konceptuální svaz znázorněný na (Obr. 32). Necht' $X_1 = \{4,6,8,9,10\}$ a $X_2 = \{1,9\}$ máme následující možnosti:

- 1) $\varepsilon_\ell(X_1) = \{4,9\}$. V tomto případě $\{4,9\}$ je prvek svazu, ale nemá minimální mohutnost. Jestliže chceme snížit vysvětlení, že prvek \mathbb{C} s minimální mohutností má na výběr mezi $\{4\}$ a $\{9\}$. $\{4,9\}$ nebo jakákoliv jiná podmnožina může být považována za vysvětlení X_1 .
- 2) $\varepsilon_\ell(X_2) = \{9\}$ pouze neprázdný předchůdce X_2 je $\{9\}$.
- 3) $\varepsilon_\ell(X_1) \cap \varepsilon_\ell(X_2) = \{9\}$.
- 4) $\varepsilon_\ell(X_1 \cap X_2) = \varepsilon_\ell(\{9\}) = \{9\}$.

To ukazuje, jak navrhovaná definice funguje [3].

5.6.5 Přímá poslední souladná eroze

Necht' $X \in P(G)$ lze vysvětlit ($X \neq \emptyset$ a $X \neq T$) a necht' \mathcal{H} je omezení. Poslední souladná eroze \mathcal{H} je definována jako

$$\varepsilon_{\ell c}(\beta(\mathcal{H})) = \cup \{X' \cap X, X' \in \text{Cons}(\mathcal{H})\},$$

kde $\text{Cons}(\mathcal{H}) =$

$$= \{X' \in P(G) \setminus \emptyset \mid \exists Y' \in P(M), (X', Y') \in \mathbb{C}, X' \subseteq \beta(\mathcal{H}), X' \text{ minimal}, X' \cap X \neq \emptyset\}.$$

Vysvětlení γ jsou definovány z $\varepsilon_{\ell c}(\beta(\mathcal{H}))$, jako pro ε_ℓ .

Jestliže uvažujeme opět příklad na (Obr. 32). Necht' $\beta(\mathcal{H}) = \{2,4,6,8,10\}$ a $X = \{2,3,5,7\}$. Máme $\varepsilon_{\ell c}(\beta(\mathcal{H})) = \{2\}$, vzhledem k tomu, že minimální předchůdci jsou $\{2\}$ a $\{4\}$. $\{4\}$ se nenachází v X [3].

5.6.6 Vlastnosti a interpretace

První důležitou vlastností je to, že musíme brát G z celého formálního hlediska. Zde jsou definovány $\varepsilon\mathcal{L}$ -koncepty vedoucí k erozi podmnožin G . Necht' (X, Y) jsou formální koncepty, $X \subseteq G$ a $Y \subseteq M$, v závislosti na definici formálního kontextu. Z definice vysvětlení X můžeme odvodit odpovídající koncepty pro Y pomocí odvozeného operátoru. To znamená

$$\alpha(\beta(\gamma)) = \{m \in M \mid \forall g \in \beta(\gamma), (g, m) \in I\}.$$

Na (Obr. 36) je erozní proces vedoucí k vysvětlení zobrazení. Můžeme si zde všimnout, že erodující X činí dilataci Y , která je v souladu s Galoisovou konexí, mezi odvozením operátorů adjunkce z dilatace a eroze.

Nyní přejdeme k vysvětlení vztahů. Bylo prokázáno, že většina z nich je stále vysvětlena pomocí odvození z poslední neprázdné eroze a poslední souladné eroze. Výsledky lze rozšířit pomocí DL kontextů následujícím způsobem.

Dále se předpokládá, že jsou definice odvozené z postupných erozí.

- 1) LLE a RLE: Oba $\triangleright^{\ell ne}$ a $\triangleright^{\ell c}$ jsou nezávislé na syntaxi. Protože jsou obě vypočteny na konečném modelu.
- 2) E-Reflexivita: Platí pro obě vlastnosti: Jestliže $C \triangleright \gamma$, pak $\gamma \triangleright \gamma$.
- 3) E-CM: Pro spojení máme jednotvárné vlastnosti pro $\triangleright^{\ell c}$: Jestliže $C \triangleright^{\ell c} \gamma$ a $\gamma \sqsubseteq D$, pak $(C \sqcap D) \triangleright^{\ell c} \gamma$. Pro $\triangleright^{\ell ne}$, jen slabší forma platí: Jestliže $C \triangleright^{\ell ne} \gamma$ a $D \triangleright^{\ell ne} \gamma$, pak $(C \sqcap D) \triangleright^{\ell ne} \gamma$. Můžeme si všimnout, že tato slabší forma je také velmi přirozená a zajímavá.
- 4) RS platí pro obě definice.
- 5) E-R-Cut platí pro obě definice.
- 6) E-C-Cut platí pro $\triangleright^{\ell c}$. Pro $\triangleright^{\ell ne}$, slabší forma platí nahrazením $\delta \sqsubseteq D$, pomocí $D \triangleright \delta$.

Jde o minimální omezení, ale také přirozené odvození z definice poslední eroze.

Pro vysvětlení odvození z poslední neprázdné eroze, lze předpokládat:

- 1) LLE a RLE je nezávislé na syntaxi.
- 2) E-CM (monotónnost): $\forall (X, X') \in P(G)^2, \prod_{U \in \alpha(X)} U \triangleright \gamma$ a $X' \in \beta(\gamma) \Rightarrow X \sqcap X' \triangleright \gamma$.
- 3) E-Reflexivita: $\prod_{U \in \alpha(X)} U \triangleright \gamma \Rightarrow \gamma \triangleright \gamma$.

- 4) RS: $:\prod_{U \in \alpha(X)} U \triangleright \gamma, \gamma' \sqsubseteq \gamma, \beta(\gamma') \neq \emptyset \Rightarrow \prod_{U \in \alpha(X)} U \triangleright \gamma'$.
- 5) E-E-Cut a E-C-Cut.

Všimněte si, že E-CM platí.

Pro vysvětlení odvození z poslední přímé souladné eroze, platí následující:

- 1) LLE a RLE je nezávislé na syntaxi.
- 2) E-CM (monotónnost): $\forall (X, X') \in P(G)^2, \prod_{U \in \alpha(X)} U \triangleright \gamma$ a $X' \in \beta(\gamma) \Rightarrow X \sqcap X' \triangleright \gamma$.
- 3) E-Reflexivita: $\prod_{U \in \alpha(X)} U \triangleright \gamma \Rightarrow \gamma \triangleright \gamma$.
- 4) RS: $:\prod_{U \in \alpha(X)} U \triangleright \gamma, \gamma' \sqsubseteq \gamma, \beta(\gamma') \neq \emptyset \Rightarrow \prod_{U \in \alpha(X)} U \triangleright \gamma'$.
- 5) E-E-Cut a E-C-Cut.

Dvě základní vlastnosti v DL a logice jsou jejich spolehlivost a úplnost. Vlastností algebraické eroze využívají všech uvedených definic:

Solidnost: Pokud je dokázáno, že koncept γ lze odvodit z množiny axiomů \mathcal{K} , pak je pravda, že γ je splnitelná s ohledem na \mathcal{K} . Protože jsou všechny navrhané vysvětlení operátory eroze v konceptuálních svazech konstruovány z konečného modelu v TBox. Každé řešení bylo extrahováno z těchto svazů s ohledem na \mathcal{K} .

Pokud $\exists \gamma | C \triangleright \gamma$, pak γ je splnitelné s ohledem na \mathcal{K} .

Důkaz je přímým důsledkem proti rozsáhlým vlastnostem eroze. Ukažme si detail důkazu z $\triangleright^{\ell ne}$ operátoru. Podle definice $\beta(\gamma) \sqsubseteq \varepsilon_\ell(\beta(C))$, a z $\varepsilon_\ell(\beta(C)) \sqsubseteq \beta(C)$. Z toho vyplývá definice $\beta(\gamma) \sqsubseteq \beta(C)$ a $C \sqsubseteq T, \gamma \sqsubseteq T$. To znamená, že γ je splnitelná s ohledem na \mathcal{K} .

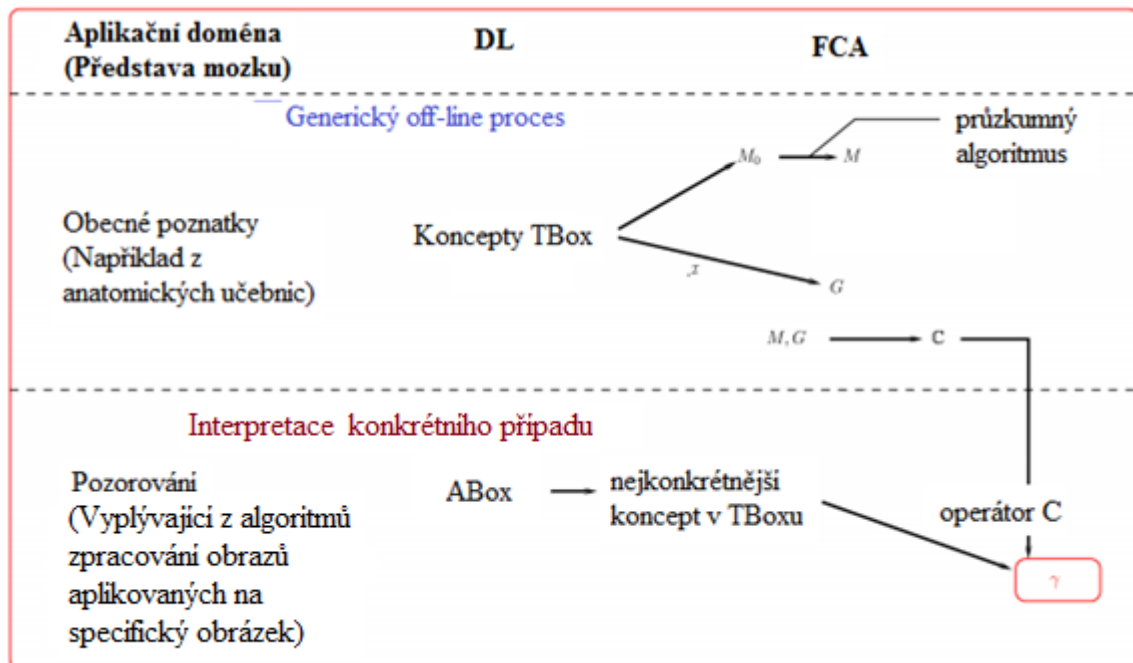
Úplnost: Postup je kompletní, pokud koncept γ je splnitelný s ohledem na \mathcal{K} . Poté se ukáže, že γ může být odvozeno z \mathcal{K} .

Jestliže γ je splnitelné s ohledem na \mathcal{K} , pak $\exists C | \mathcal{K} \models (\gamma \sqsubseteq C)$.

Poněvadž ε zachovává největší prvek, máme $\varepsilon(\beta(T)) = \beta(T)$, a $\varepsilon_\ell(\beta(T)) = \beta(T)$, z toho vyplývá, že každá podmnožina z $\beta(T)$ je vhodným vysvětlením pro $\triangleright^{\ell ne}$. Proto $\mathcal{K} \triangleright^{\ell ne} \gamma$. Pojdme se nyní podívat na $C = \gamma$. Potom C je splnitelné s ohledem na \mathcal{K} a $C \triangleright^{\ell ne} \gamma$ z vlastností reflexivity [3].

5.7 Interpretace obrazu mozku

Nyní si ukážeme, jak teoretická aplikace platí v náročném oboru patologie mozku. Celý proces je shrnut v obrázku (Obr. 37).



Obr. 37 Schéma popisující spojení mezi danými teoriemi a problémem interpretace obrazu

Horizontálně přerušované čáry oddělují hlavní bloky modulu. První modul je generický, off-line a umožňuje konstrukci konceptů svazů \mathbb{C} z poznatků aplikační domény. Obecné poznatky jsou formalizovány jako TBoxy z daného popisu logiky. Názvy konceptů pak představují počáteční atributy stanovené ve formálním konceptu FCA. Objekty jsou nastaveny jako volný model. Průzkumný algoritmus je používán k vytvoření indukovaného kontextu $\mathbb{K} = (G, M, I)$, což vede ke konceptuálnímu svazu \mathbb{C} .

Druhý modul je proveden pro každý obraz. Výsledek z algoritmu procesů je použit na posuzování obrazů, které jsou uloženy v ABoxu. Ten je po kontrole konzistence přepsán jako konjunkce zúčastněných procesů. Poté je složité vysvětlit pojem \mathbb{C} .

Anatomické a patologické znalosti o mozku jsou vysvětleny výše pomocí jazyka DL.

Na obrázku (Obr. 38) je popsána teorie ontologie na prostorových vlastnostech nádoru mozku.

<i>Brain</i>	⊆	<i>HumanOrgan</i>
<i>CerebralHemisphere</i>	⊆	<i>BrainAnatomicalStructure</i>
<i>PeripheralCerebralHemisphere</i>	⊆	<i>CerebralHemisphereArea</i>
<i>SubCorticalCerebralHemisphere</i>	⊆	<i>CerebralHemisphereArea</i>
<i>GreyNuclei</i>	⊆	<i>BrainAnatomicalStructure</i>
<i>LateralVentricle</i>	⊆	<i>BrainAnatomicalStructure</i>
<i>BrainTumor</i>	⊆	<i>Disease</i> ∩ ∃hasLocation. <i>Brain</i>
<i>SmallDeformingTumor</i>	⊆	<i>BrainTumor</i> ∩ ∃hasBehavior. <i>Infiltrating</i> ∩ ∃hasEnhancement. <i>NonEnhanced</i>
<i>SubCorticalSmallDeformingTumor</i>	⊆	<i>SmallDeformingTumor</i> ∩ ∃hasLocation. <i>SubCorticalCerebralHemisphere</i> ∩ ∃closeTo. <i>GreyNuclei</i>
<i>PeripheralSmallDeformingTumor</i>	⊆	<i>BrainTumor</i> ∩ ∃hasLocation. <i>PeripheralCerebralHemisphere</i> ∩ ∃farFrom. <i>LateralVentricle</i>
<i>LargeDeformingTumor</i>	⊆	<i>BrainTumor</i> ∩ ∃hasLocation. <i>CerebralHemisphere</i> ∩ ∃hasComponent. <i>Edema</i> ∩ ∃hasComponent. <i>Necrosis</i> ∩ ∃hasEnhancement. <i>Enhanced</i>
<i>DiseasedBrain</i>	⊆	<i>Brain</i> ∩ ∃isAlteredBy. <i>Disease</i>
<i>TumoralBrain</i>	⊆	<i>Brain</i> ∩ ∃isAlteredBy. <i>BrainTumor</i>
<i>SmallDeformingTumoralBrain</i>	⊆	<i>Brain</i> ∩ ∃isAlteredBy. <i>SmallDeformingTumor</i>
<i>LargeDeformingTumoralBrain</i>	⊆	<i>Brain</i> ∩ ∃isAlteredBy. <i>LargeDeformingTumor</i>
<i>PeripheralSmallDeformingTumoralBrain</i>	⊆	<i>Brain</i> ∩ ∃isAlteredBy. <i>PeripheralSmallDeformingTumor</i>
<i>SubCorticalSmallDeformingTumoralBrain</i>	⊆	<i>Brain</i> ∩ ∃isAlteredBy. <i>SubCorticalSmallDeformingTumor</i>
		...

Obr. 38 Ontologie na prostorových vlastnostech nádoru mozku

Prostorové vztahy jsou důležité k pochopení prostorového uvažování. V mozkové obrazové interpretaci (Obr. 38), z analýzy procesů obrazů, specializovaných procesů rozpoznávání, můžeme odvodit následující Aboxy:

$$t_1: \text{BrainTumor}$$

$$e_1: \text{NonEnhanced}$$

$$l_1: \text{LateralVentricle}$$

$$p_1: \text{PeripheralCerebralHemisphere}$$

$$(t_1, e_1): \text{hasEnhancement}$$

$$(t_1, l_1): \text{farFrom}$$

$$(t_1, p_1): \text{hasLocation}$$

Z nich lze odvodit následující pojem t_1 :

$$\text{BrainTumor} \cap \exists \text{hasEnhancement. NonEnhanced} \cap \exists \text{farFrom. LateralVentricle} \\ \cap \exists \text{hasLocation. PeripheralCerebralHemisphere}$$

Interpretaci úlohy můžeme vidět jako koncept abdukčního problému $\langle K, C \rangle$, který může být formulován následujícími způsoby: $\gamma \sqsubseteq_K C$, kde C nese

BrainTumor $\sqcap \exists hasEnhancement. NonEnhanced \sqcap \exists farFrom. LateralVentricle \sqcap \exists hasLocation. PeripheralCerebralHemisphere$, označený jako $C7$ ve svazu (Obr. 36).

Možná vysvětlující sada je

$\{DiseasedBrain, \exists isAlteredBy. T, SmallDeformingtumoralBrain,$

$PeripheralSmalleformingtumoralBrain, C1, C6, C9, C15\}$,

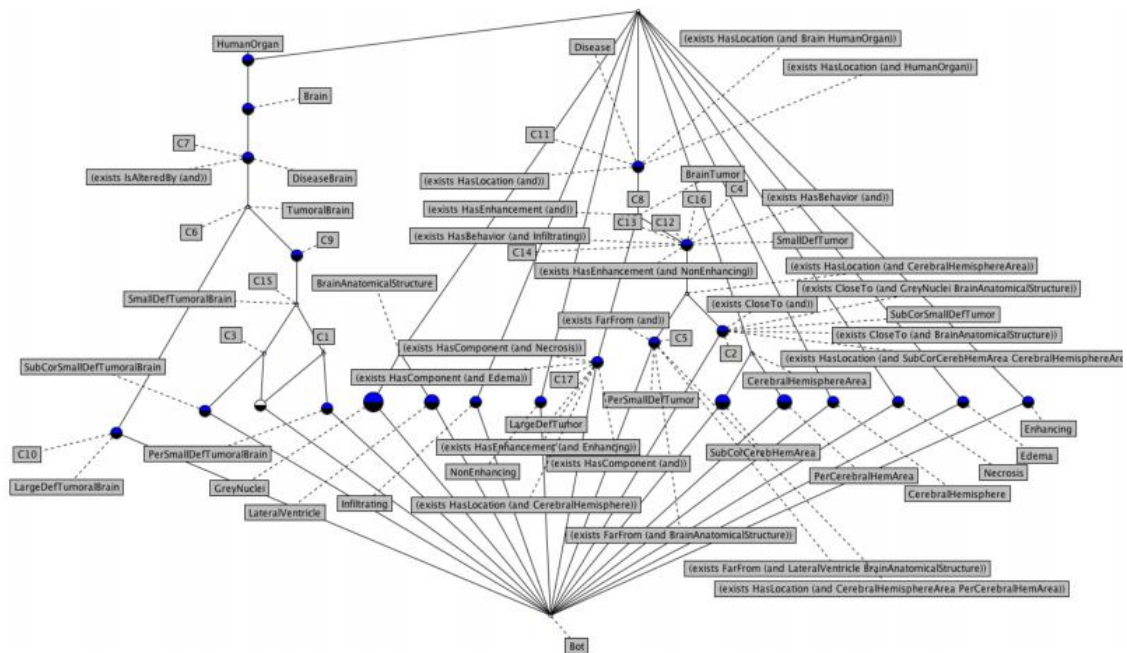
Kde C_i jsou složité komplexní cyklické koncepty. Jsou příliš velké na to, aby zde byly rozšířeny. Výhodné řešení s ohledem na minimum a racionalitu by mohlo být:

$\gamma \equiv PeripheralSmallDeformingtumoralBrain$

Pak je možné vytvořit konečný model $\mathfrak{X} = (\Delta^{\mathfrak{X}}, \cdot^{\mathfrak{X}})$. Doména $\Delta^{\mathfrak{X}}$ odpovídá množině $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, gn_1, gn_2, gn_3, gn_4, lv_1, lv_2, t_1, t_2, t_3, t_4, inf_1, ne_1, ne_2, ch_1, a_1, a_2, ch_1, a_3, a_4, e_1, n_1, d_1\}$, a výpis z funkce přiřazení jako je:

- 1) $HumanOrgan^{\mathfrak{X}} := \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, c_1\}$;
- 2) $CerebralHemisphere^{\mathfrak{X}} := \{ch_1\}$;
- 3) $BrainAnatomicalStructure^{\mathfrak{X}} := \{gn_1, gn_2, gn_3, gn_4, lv_1, lv_2\}$;
- 4) ...;
- 5) $isAlteredBy^{\mathfrak{X}} := \{(b_3, t_3), (b_4, t_1), (b_4, t_2), (b_4, t_3), (b_5, t_1), (b_6, t_2), (b_7, t_4)\}$;
- 6)

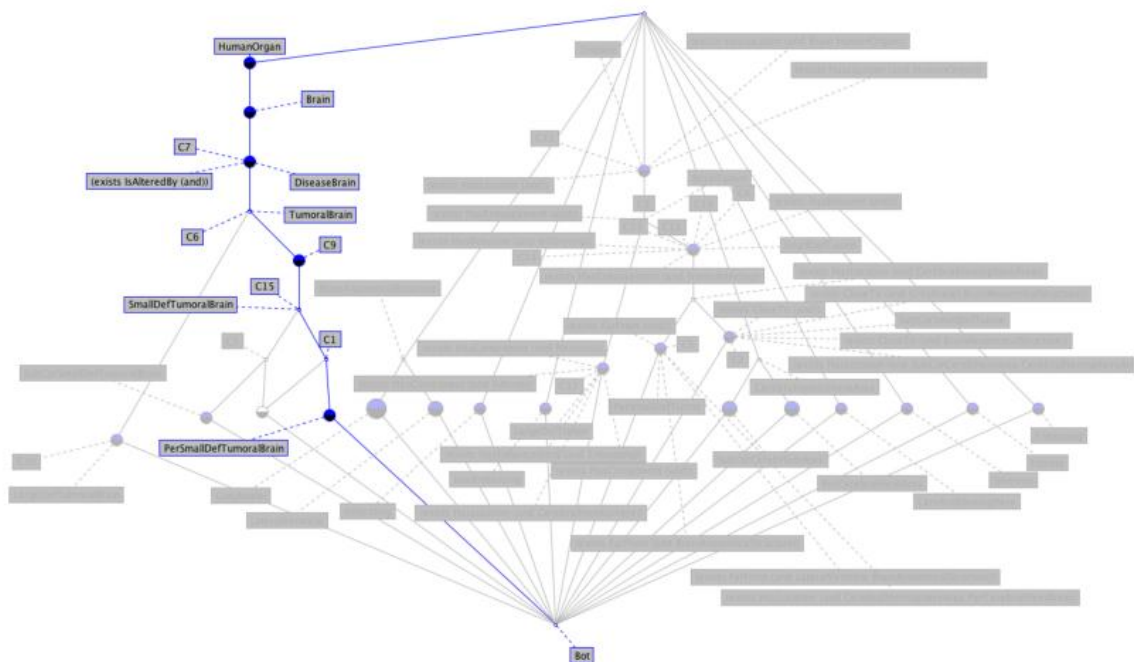
Související konceptuální svaz je znázorněn na obrázku (Obr. 39.)



Obr. 39 Konceptuální svaz indukovaný pomocí formálního kontextu \mathbb{K}_{Brain}

Uzly odpovídají formálním konceptům, jako dvojice (X, Y) , kde X je sada oblasti prvků a Y je sada $\varepsilon\mathcal{L}$ -konceptů. Na obrázku (Obr. 40) je zobrazena eroze vypočtených procesů vedoucí k vysvětlení zobrazené sady. Můžeme vidět, že tento proces vede k vysvětlení *PeripheralSmallDeformingTumoralBrain*.

V tomto případě je řešení názvem konceptu. Jednoduché zpětné řetězení klasifikace konstrukce by vedlo ke stejnému výsledku. To není překvapující, protože výsledek závisí na znalostech základny. V tomto případě název konceptu splňuje omezení minima [3].



Obr. 40 Erozní cesta vedoucí vede k výpočtu preferovaného vysvětlení interpretace obrazu abdukčním problémem

5.8 Volba morfologických operátorů

Další morfologické operátory mohou být definovány stejně. Definování dilatací pomocí vzdáleností nebo přímo, je možné. Může vést k zajímavým znalostem revize, jednání a fúze. Ovšem to je mimo rozsah abdukce uvažování. Operace, které nejsou rozsáhlé, jako jsou například navrhované eroze, jsou vhodné. Pro dilataci už nikoliv. V rámci abdukce má otevření požadované anti-rozsáhlé vlastnosti a může vést k filtrování pojmů. Rozhodne, zda řešení patří do přípustné sady. Uzavření není pro abdukci vhodné, protože je rozsáhlé. Jiné operátory matematické morfologie, jako je například skelet, mohou být zkoumány [3].

ZÁVĚR

Cílem této práce bylo aplikovat metody matematické morfologie s využitím formální konceptuální analýzy. Operátory matematické morfologie se často využívají tam, kde je požadavek na rychlé zpracování dat.

Práce je rozdělená do dvou částí. První teoretická část diplomové práce postupně rozebírá základní morfologické pojmy, které jsou definovány na binární obraz a šedotónovou matematickou morfologie. Na binárním obraz jsou aplikovány pojmy jako morfologická transformace, translace bodové množiny a symetrická bodová množina. U šedotónové matematické morfologie je využito pojmů ekvivalence mezi množinami či funkcemi, stín množiny a vršek množiny. Dále je v teoretické části využito matematické morfologie pro zvukovou detekci. V této kapitole si můžeme všimnout průběhu grafu intenzity signálu. Zatímco RMS průběh signálu znehodnotila, dilatace zachovala původní signál. V teoretické části jsou dále uvedeny základní pojmy teorie svazů, na kterých je postavena formální konceptuální analýza. V závěru teoretické části jsou postupně rozebrány základní morfologické operace. Konkrétně se jedná o erozi, dilataci, otevření, uzavření, hit-miss transformace, skelet, extrakce hranice, zesílení a zeslabení. Tyto operátory se později využívají v praktické části.

Praktická část je rozdělena na dvě kapitoly. V té první je zpracována formální konceptuální analýza, která je následovně aplikována na morfologické operace s využitím teorie svazů a popisné logiky. V kapitole o FCA jsou postupně rozebrány základní pojmy. Postupně jsou vysvětleny pojmy jako formální kontext, formální koncept, konceptuální svaz, indukované Galoisovy konexe, atributové implikace, vícehodnotové kontexty a konceptuální škálování. Dále jsou v práci uvedeny konkrétní příklady tabulky konceptů, konceptuálních svazů, seznamu konceptů a vícehodnotových kontextů.

V druhé kapitole praktické části je teorie formální konceptuální analýzy, popisné logiky a matematické morfologie aplikovaná na interpretaci obrazu mozku. Konkrétně je rozebráno, jak využít morfologické eroze k výpočtu preferované interpretace obrazu mozku.

Využití formální konceptuální analýzy v oblasti matematické morfologie je ovšem široké. V této práci je využívána oblast lékařství. Ovšem matematické morfologie lze využít i v jiných oblastech jako je například kriminalistika, geologie, knihovnictví, psychologie nebo informatika.

ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

The aim of this work was to apply methods of mathematical morphology using formal concept analysis. Its operators are often used when there is a requirement for rapid data processing.

The thesis is divided into two parts. Theoretical part of the thesis analyzes basic morphological concepts, which are defined on binary image and grayscale mathematical morphology. Concepts such as morphological transformation, translation and symmetric set of points are applied to binary images. Grayscale mathematical morphology uses terms for equivalence between sets or functions, shadow of set and top of set. Theoretical part uses mathematical morphology also for detection of sound. There you can see the curve showing strength of signal in time. While the RMS discarded waveform, dilation retains its original shape. The following chapter describes basic concepts of lattice theory that is based on formal concept analysis. At the end of the theoretical part, you can find explanation of basic morphological operations, specifically erosion, dilation, opening, closing, hit-miss transformation, skeleton, boundary extraction, amplification and attenuation. These operators are later used in the practical part.

Practical part is divided into two chapters. First chapter processes formal concept analysis. It is subsequently applied to the morphological operations using lattice theory and descriptive logic. Chapter about FCA gradually explains basic concepts, such as formal context, formal concept, conceptual cluster, induced Galois connections, attribute implications, many-valued contexts and conceptual scaling. The specific examples show the table concepts, concept lattices, list of concepts and multivalued contexts.

In second chapter of practical part is described theory of formal concept analysis, descriptive logic and mathematical morphology that is applied to the interpretation of brain images. Specifically, it explains use of morphological erosion to calculate the preferred interpretation of brain images.

Use of formal concept analysis in the field of mathematical morphology is very wide. Final section focuses on the field of medicine. However, mathematical morphology can also be used in other areas like criminology, geology, library science, psychology or science.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] KUČERA, Radan. Základy teorie svazů. [online]. 2010 [cit. 2014-05-19]. Dostupné z:<http://www.math.muni.cz/~kucera/texty/Svazy2010.pdf>
- [2] BĚLOHLÁVEK, Radim. Konceptuální svazy a formální konceptuální analýza [online]. 2004 [cit. 2014-05-19]. Dostupné z:http://belohlavek.inf.upol.cz/publications/BeI_Ksfka.pdf
- [3] ATIF, Jamal a Céline HUDELOT. Explanatory Reasoning for Image Understanding Using Formal Concept Analysis and Description Logics [online]. [cit. 2014-05-19]. Dostupné z:<https://www.lri.fr/~atif/lib/exe/fetch.php?media=research:atif-smc.pdf>
- [4] Zpracování obrazu a jeho statistická analýza. E-learning [online]. [cit. 2014-05-19]. Dostupné z:http://e-learning.tul.cz/cgi-bin/elearning/elearning.fcgi?ID_tema=67&stranka=publ_tema
- [5] HLAVÁČ, Václav. Matematická morfologie. [online]. [cit. 2014-05-19]. Dostupné z:<http://cmp.felk.cvut.cz/~hlavac/Public/TeachingLectures/BinMatMorfolCesky.pdf>
- [6] HORÁK, Karel. Matematická morfologie. [online]. [cit. 2014-05-19]. Dostupné z:http://midas.uamt.fec.vutbr.cz/ZVS/lectures-pdf/12_Matematicka_morfologie.pdf
- [7] MUDROVÁ, Martina. Matematická morfologie a segmentace obrazu. [online]. 2004 [cit. 2014-05-19]. Dostupné z:<http://uprt.vscht.cz/mudrova/zob/prednasky/10-MORFOLOGIE/morfologie-tisk.pdf>
- [8] HEIJMANS, Henk J.A.M. a Jos B.T.M. ROERDING. Computational imaging and vision: Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing. [online]. 1998 [cit. 2014-05-19].
- [9] ISELMAN, Christer O. Image and vision computing. [online]. 2009 [cit. 2014-05-19]. Dostupné z:<http://www2.math.uu.se/~kiselman/IMAVIS2896.pdf>

- [10] SHIH, Frank Y. Image processing and mathematical morphology: Fundamental and Applications. [online]. 2009 [cit. 2014-05-19].
- [11] MATHERON, Georges. The Birth of Mathematical Morphology. [online]. 2000 [cit. 2014-05-19]. Dostupné z: http://cmm.ensmp.fr/~serra/pdf/birth_of_mm.pdf
- [12] CURIC, Vladimir. Mathematical Morphology and Distance Transforms. [online]. [cit. 2014-05-19]. Dostupné z:
http://www.it.uu.se/edu/course/homepage/bild1/vt13/lecture_morphology_dt.pdf
- [13] PRISS, Uta. Formal Concept Analysis in Information Science. [online]. [cit. 2014-05-19]. Dostupné z:<http://www.upriss.org.uk/papers/arist.pdf>
- [14] ECKART, Martin. Audio onset detection using mathematical morphology. [online]. [cit. 2014-05-19]. Dostupné z: <http://www.music-ir.org/mirex/abstracts/2012/ME1.pdf>
- [15] WILLE, R., GANTER, B. Formal Concept Analysis – Mathematical Foundations. 1st ed. Springer, 1998. 284 s. ISBN 3-540-62771-5.
- [16] Matematická morfologie. [online]. [cit. 2014-05-19]. Dostupné z:<http://blade1.ft.tul.cz/elearning/Media/File/5/123/P7.pdf>
- [17] CHAJDA, Ivan. Algebra 3. Olomouc: Univerzita Palackého, 1998. 125 s. ISBN 80-7067-803-8.
- [18] KOPKA, Jan. Svazy a booleovy algebry. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, 1991. 244 s. ISBN 80-7044-025-2.
- [19] RACHŮNEK, Jiří. Svazy. Olomouc: Univerzita Palackého, 2003. 85 s. ISBN 80-2440-650-0.
- [20] BĚLOHLÁVEK, Radim. INTRODUCTION TO FORMAL CONCEPT ANALYSIS [online]. [cit. 2011-03-29]. Dostupné z WWW:<<http://belohlavek.inf.upol.cz/vyuka/IntroFCA.pdf>>.
- [21] SERRA, J. Image analysis and mathematical morphology. Vol. 1 (Academic Press, 1982).
- [22] SERRA, J. Image analysis and mathematical morphology. Vol 2 (academic Press, 1988).

- [23] SERRA, J. Introduction to mathematical morphology, Comput. Vis., Graph. Image Proc., 1986, 35, pp. 283-305.
- [24] BANGHAM, J. A, MARSHALL, S. Image nad signal processing with mathematical morphology, Electronics Communication Engineering Journal, June 1998.
- [25] HARZHEIM, By Egbert. Ordered sets. New York: Springer, 2005. ISBN 978-038-7242-224.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

DL	Description Logics
FCA	Formal Concept Analysis.
MM	Mathematical Morphology.
RMS	Root Mean Square
SHD	Shake Hands Disease
SHDV	Shake Hands Disease Virus

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1 Sjednocení množiny A, B	12
Obr. 2 Průnik množin A, B	13
Obr. 3 Doplněk množiny A.....	13
Obr. 4 Rozdíl dvou množin A – B	14
Obr. 5 Pravdivostní tabulky logických operací.....	15
Obr. 6 Ukázka pro 2D bodovou množinu.....	16
Obr. 7 Typické strukturní elementy	16
Obr. 8 Příklad translace o vektor $h = (0,1)$	17
Obr. 9 Příklad symetrické bodové množiny	17
Obr. 10 Vršek množiny	19
Obr. 11 Stín množiny	19
Obr. 12 Porovnání dilatace, eroze na signálu sinus	20
Obr. 13 Porovnání dilatace a RMS.....	21
Obr. 14 Ukázka vnitřního gradientu křivky [14]	22
Obr. 15 Hasseův diagram	25
Obr. 16 Využití Hasseůva diagramu	25
Obr. 17 Vlevo svaz $N5$ (pětiúhelník), vpravo svaz $M5$ (diamant)	32
Obr. 18 Ukázka dilatace	37
Obr. 19 Ukázka eroze	38
Obr. 20 Ukázka morfologického otevření	39
Obr. 21 Ukázka morfologického uzavření.....	40
Obr. 22 Ukázka transformace tref či miň	41
Obr. 23 Diskrétní kruhy o poloměru jedna.....	41
Obr. 24 Ukázka skeletu s maximálním kruhem.....	42
Obr. 25 Ukázka extrakce hranice	43
Obr. 26 Tabulková data s objekty a atributy.....	47
Obr. 27 Tabulka popisující objekty x a atributy y	47
Obr. 28 Konceptuální svaz kontextu X, Y, I	52
Obr. 29 Seznam konceptů.....	52
Obr. 30 Příklad mozkové interpretace obrazu	57
Obr. 31 Algoritmus pro výpočet kmene základny	64
Obr. 32 Jednoduchý příklad konceptuálního svazu a tabulka formálního kontextu	65

Obr. 33 Algoritmus pro výpočet základny pro obecný koncept v daném konečném modelu	66
Obr. 34 Implikace základny odvozené z příkladu SHD	67
Obr. 35 Konceptuální svaz indukovaný podle SHD ontologie [3].	68
Obr. 36 Erozní cesta spojená s SHD abdukčním problémem [3]	72
Obr. 37 Schéma popisující spojení mezi danými teoriemi a problémem interpretace obrazu	77
Obr. 38 Ontologie na prostorových vlastnostech nádoru mozku.....	78
Obr. 39 Konceptuální svaz indukovaný pomocí formálního kontextu $\mathbb{K}Brain$	80
Obr. 40 Erozní cesta vedoucí vede k výpočtu preferovaného vysvětlení interpretace obrazu abdukčním problémem.....	81

SEZNAM TABULEK

Tab. 1 Formální koncept $A1, B1$	49
Tab. 2 Další formální koncepty.....	50
Tab. 3 Binární relace mezi objekty X a atributy Y	51
Tab. 4 Vícehodnotové kontexty	55
Tab. 5 Konceptuální škálování	55