Fourierove rady – základné vlastnosti a aplikácie

Michal Mucha

Bakalárska práca
2014

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Michal Mucha**
Osobní číslo:	**A11147**
Studijní program:	**B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor:	**Informační a řídicí technologie**
Forma studia:	**prezenční**
Téma práce:	**Fourierovy řady – základní vlastnosti a aplikace**

Zásady pro vypracování:

1. **Vypracujte literární rešerši na téma Nekonečné řady se zaměřením na řady trigonometrické (Fourierovy).**
2. **Vypracujte rešerši na téma aproximace funkce polynomem se zaměřením na aproximaci trigonometrickými polynomy.**
3. **Popište příkazy softwaru Mathematica týkající se této problematiky.**
4. **Proveďte na příkladech ukázku aproximace funkce trigonometrickými polynomy.**
5. **Proveďte na příkladech ukázku výpočtu Fourierových řad pro zadané funkce.**
6. **Popište využití Fourierových řad při řešení úloh z matematiky, fyziky a jiných oborů.**

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **ŠKRÁŠEK, Josef. Základy aplikované matematiky II. 1. vyd. Praha, 1986, 896 s.**
2. **ČERNÝ, Ilja. Úvod do inteligentního kalkulu 2: 1000 příkladů z pokročilejší analýzy. Vyd. 1. Praha: Academia, 2005, 329 s. ISBN 8020013148.**
3. **The Mathematica Book, manuál pro software Mathematica.**
4. **KVASNICA, Jozef. Matematický aparát fyziky. Vyd. 2., opr. Praha: Academia, 1997, 383 s. ISBN 8020006036.**
5. **BRAUN, Martin. Differential equations and their applications: an introduction to applied mathematics. 4th ed. New York: Springer, c1993, 578 s. ISBN 978-0-387-97894-9.**

Vedoucí bakalářské práce:	**Mgr. Vladimír Polášek, Ph.D.** Ústav matematiky
Datum zadání bakalářské práce:	**28. února 2014**
Termín odevzdání bakalářské práce:	**13. června 2014**

Ve Zlíně dne 28. února 2014

UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ Fakulta aplikované informatiky

L.S.

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
Ve *ředitel ústavu*

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- Že odevzdaná verze diplomové/bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

Mucha
....
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Táto práca sa zaoberá témou Fourierových radov, patriacich medzi rady trigonometrické. V teoretickej časti sú uvedené základné vety a definície používané v oblasti nekonečných funkčných radov. V praktickej časti sú na príkladoch demonštrované príkazy softvéru Mathematica, týkajúce sa tejto problematiky. Praktickú časť ďalej tvoria riešené príklady na aproximáciu funkcií pomocou trigonometrických polynómov.

Kľúčové slová: funkčný rad, mocninný rad, Taylorov rad, trigonometrický rad, Fourierov rad, konvergencia radu, aproximácia, interpolácia

ABSTRACT

This work deals with the topic of Fourier series, which belong to the trigonometric series. Theoretical section describes the basic phrases and definitions used in the field of infinite functional series. In the practical section, there are on examples demonstrated commands of Mathematica software regarding our thesis. The practical part further consists of examples based on approximation of functions by trigonometric polynomials.

Keywords: functional series, power series, Taylor series, trigonometric series, Fourier series, convergence of series, approximation, interpolation

Chcel by som poďakovať Mgr. Vladimírovi Poláškovi, Ph.D. za pomoc, kontrolu a pedagogickú podporu pri vypracovaní bakalárskej práce a ďalej chcem poďakovať svojej mame za všetko.

„Existujú tisíce spôsobov, ako zabiť čas, ale žiadny, ako ho vzkriesiť.“ (Albert Einstein)

OBSAH

ÚVOD

V našom okolí sa vyskytuje veľké množstvo periodicky opakujúcich sa javov, ktoré sa pomocou matematickej analýzy snažíme nejakým spôsobom popísať. Pri riešení problémov, v ktorých sa uplatňujú periodické deje, je výhodné vyjadriť príslušné funkcie pomocou Fourierových radov, ktoré patria medzi rady trigonometrické. Pomocou Fourierových radov je možné opísať rôzne príklady akustických, mechanických alebo elektrických kmitov. Bežne ich využívame napríklad na digitalizáciu hudby alebo harmonickú analýzu. O zavedenie Fourierovho radu sa zaslúžili matematici Leonhard Euler a Daniel Bernoulli svojimi prácami v oblasti teórie strún. Používanie trigonometrických radov sa veľmi rozšírilo, keď francúzsky matematik a fyzik Jean Baptiste Joseph Fourier odvodil Fourierove koeficienty vo svojej práci o vedení tepla z roku 1822. Ďalším veľkým prínosom do teórie Fourierových radov boli postačujúce podmienky pre rozvoj funkcií do trigonometrických radov, ktoré podal nemecký matematik Peter Gustav Lejeune-Dirichlet.

Cieľom tejto bakalárskej práce je výklad teórie nekonečných funkčných radov so zameraním práve na trigonometrické rady a aproximáciu funkcií týmito radmi. V prvej kapitole teoretickej časti sú vysvetlené základné pojmy z oblasti nekonečných funkčných radov. Bližšie sú popísané najdôležitejšie funkčné rady, a to mocninné a trigonometrické rady. Na konci prvej kapitoly je uvedené využitie Fourierových radov v oblasti matematickej analýzy. Druhá kapitola oboznamuje s vybranými metódami aproximácie a interpolácie funkcie polynómom. Na začiatku praktickej časti sú popísané príkazy softvéru Mathematica, pomocou ktorých dokážeme získať Fourierov rad zadaných funkcií v rôznych tvaroch alebo jednotlivé Fourierove koeficienty. Ďalej sú popísané príkazy pre prácu s trigonometrickými výrazmi a príkazy slúžiace na interpoláciu podľa zadaných interpolačných podmienok. Na konci prvej kapitoly praktickej časti je ukážka postupu aproximácie funkcie trigonometrickým polynómom v softvére Mathematica. V ďalšej kapitole je príkladný výpočet aproximačného trigonometrického polynómu pre funkciu zadanú tabuľkou v zmysle interpolácie. Posledná kapitola tejto práce je určená pre príklady na výpočet približného tvaru Fourierovho radu a ukážku vplyvu počtu členov aproximačného polynómu u vybraných funkcií v zadanom intervale periodicity.

I. TEORETICKÁ ČASŤ

1 FUNKČNÉ RADY

Keď v nekonečnom rade

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

predstavujú členy u_n funkcie premennej x, definovanej na spoločnom intervale J, takže je

$$u_1 = f_1(x), u_2 = f_2(x), \dots, u_n = f_n(x), \dots,$$

potom nielen čiastočné súčty s_n, ale aj zvyšok R_n a súčet s (pokiaľ existuje) sú funkciami premennej x. Je teda

$$s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

$$R_n(x) = s(x) - s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(x)$$

Pritom konvergenčným oborom (oborom konvergencie) radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_k(x)$ alebo definičným oborom súčtu $s(x)$ nazývame množinu D, obsahujúcu práve tie body $x \in J$, pre ktoré je rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergentný. Ak dosadíme do tohto radu za x určité číslo $x_0 \in D$, dostaneme konvergentný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_k(x_0)$, ktorého súčet s_0 sa rovná funkčnej hodnote$s(x_0)$, takže

$$s_0 = s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_k(x_0).$$

1.1 Konvergencia funkčných radov

Riešenie konvergencie radov nieje primárnym cieľom tejto bakalárskej práce, je ale vhodné spomenúť základné definície, o ktorých je dobré vedieť pri ďalšom štúdiu a výpočtoch v oblasti teórie Fourierových radov. V ďalšom odstavci budú definované pojmy bodová a rovnomerná konvergencia a ďalej budú spomenuté niektoré kritéria rovnomernej konvergencie. Zavedieme pojem absolútna konvergencia radu a definujeme derivovanie a integrovanie radov člen po člene.

1.1.1 Bodová a rovnomerná konvergencia

Definícia 1. Bodová konvergencia. O rade funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ povieme, že bodovo konverguje na množine $D \subset J$, ak pre každé $x_0 \in D$ konverguje číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Definícia 2. Rovnomerná konvergencia. Rovnomerná konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ so súčtom s sa definuje ako rovnomerná konvergencia postupnosti čiastočných súčtov

$s_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ ku s, teda ako platnosť nasledujúceho výroku.

Pre každé $\varepsilon \in R_+$ existuje n_0 tak, že

$$n > n_0, x \in J \Rightarrow \left\| s_n(x) - s(x) \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right\| < \varepsilon.$$

1.1.2 Kritériá rovnomernej konvergencie radov

Tak ako u číselných radov a bodovej konvergencie, aj u funkčných radov a rovnomernej konvergencie existujú rôzne kritériá pre konvergenicu, pričom nie každé musí byť vždy vhodné pre určenie konvergenčného oboru danej rady funkcií.

Veta 1. Bolzano-Cauchyho kritérium rovnomernej konvergencie radu. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje rovnomerne v J, práve keď platí podmienka:

Pre každé $\varepsilon \in R_+$ existuje n_0 tak, že

$$n > n_0, p \in N, x \in J \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

Veta 2. Porovnávacie kritérium rovnomernej konvergencie radu. Ak platí nerovnosť $f_n(x) \leq g_n(x)$ pre všetky $x \in J$ a všetky $n \in N$ a ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ rovnomerne v J, potom konvergujú aj rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Ak je $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ v J pre všetky $n \in N$, označujeme rad $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ ako majorantný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ v J.

Veta 3. Dirichletovo kritérium rovnomernej konvergencie radu. Nech postupnosť funkcií $f_k(x) : J \to C, g_k(x) : J \to R$ splňujú tieto podmienky:

Pre každé $x \in J$ je

$$g_1(x) \geq g_2(x) \geq \cdots \geq g_n(x) \geq \cdots \geq 0,$$

$$g_k(x) \to 0 \text{ rovnomerne v } J$$

a existuje $K \in R_+$ tak, že

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq K \quad pre\ všetky\ n \in N\ a\ všetky\ x \in J.$$

potom rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$$

konverguje rovnomerne v J.

Veta 4. Abelovo kritérium rovnomernej konvergencie radu. Pre každé $k \in N$ nech je $f_k(x) : J \to C\ a\ g_k(x) : J \to R$, pričom nech je postupnosť $\{g_k(x)\}$ pre každé $x \in J$ monotónna a nech existuje $K \in R$ tak, že

$$x \in J, k \in N \ \Rightarrow |g_k(x)| \leq K.$$

Ak konverguje rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

rovnomerne v J, konverguje v J rovnomerne aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x).$$

1.1.3 Absolútna a relatívna konvergencia

Definícia 3. Absolútna konvergencia. Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a zároveň konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje absolútne. V prípade, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ diverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje relatívne (neabsolútne).

1.1.4 Derivovanie radu člen po člene

Veta 5. Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ reálnych funkcií aspoň v jednom bode $c \in (a, b)$ a ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konverguje rovnomerne v (a, b), potom konverguje rovnomerne aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, pričom

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad v\ celom\ (a, b).$$

1.1.5 Integrovanie radu člen po člene

Veta 6. Ak sú $f_n(x) : \langle a, b\rangle \to R$ funkcie spojité v $\langle a, b\rangle$ a ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ v $\langle a, b\rangle$ rovnomerne, je

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x).$$

1.2 Mocninné rady

1.2.1 Mocninné rady obecne

Zvláštnym prípadom funkčných radov sú mocninné rady. Vyznačujú sa jednoduchými podmienkami pre rovnomernú konvergenciu, zaujímavými vlastnosťami a ľahkými výpočetnými operáciami.

Definícia 4. Mocninný rad. Mocninným radom so stredom v bode x_0 nazývame funkčný rad tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x - x_0)^n = u_0 + u_1(x - x_0) + u_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$

kde čísla u_k nazývame koeficienty.

Ak je $x_0 = 0$, dostaneme mocninný rad so stredom v bode 0 tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots.$$

Veta 7. Abelova veta o konvergencii mocninného radu. Ak mocninný rad konverguje pre $x_1 \neq 0$, konverguje absolútne v každom bode x, pre ktorý platí $|x| < |x_1|$.

Ak mocninný rad diverguje pre $x = x_2$, diverguje v každom bode x, pre ktorý je

$|x| > |x_2|$.

Definícia 5. Konvergenčný interval. Ak konverguje daný mocninný rad $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ aspoň v jednom bode $x \neq 0$, potom existuje taký interval $(-R, R)$ (konvergenčný interval radu), v ktorého každom bode x rad $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ konverguje absolútne a v každom bode

$x \notin \langle -R, R \rangle$ diverguje.

Definícia 6. Určenie konvergenčného intervalu. Číslo R nazývame polomer konvergencie (konvergenčný polomer) mocninného radu $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$. Určí sa na základe Cauchyovho-Hamardovho vzorca

$$R = \frac{1}{\mu}, \quad kde \mu = \overleftarrow{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|},$$

kde $\overleftarrow{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ značí tzv. hornú limitu (limes superior) postupnosti $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$.

Mocninný rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots,$$

ktorá konverguje na intervale $J = (-R, R)$, má tieto vlastnosti:

1. Konverguje absolútne aj rovnomerne na každom uzavretom intervale, ktorý leží v intervale J.
2. Jeho súčet $s(x)$ je spojitá funkcia na intervale J.

3. Má na intervale J derivácie všetkých rádov. Dostaneme ich postupným derivovaním radu člen po člene. Všetky takto vzniknuté rady majú rovnaký konvergenčný polomer R.
4. Môžeme ho integrovať člen po člene na každom interevale $\langle a, x \rangle$, ležiacom v intervale J, pričom takto vzniknutý rad má konvergenčný polomer R.

Aplikáciou mocninných radov v matematike je napríklad numerický výpočet určitých integrálov, výpočet hodnôt funkcií alebo výpočet partikulárneho riešenia diferenciálnych rovníc. [1]

1.2.2 Taylorov polynóm a rad

Taylorove rady patria medzi najpoužívanejšie mocninné rady. Využívajú sa hlavne na aproximáciu funkcií pomocou Taylorovho rozvoja.

Definícia 7. Taylorov polynóm. Ak uvažujeme funkciu $f(x)$, ktorá má v bode x_0 derivácie až do rádu n, potom je možné tejto funkcii priradiť tzv. Taylorov polynóm stupňa n v tvare

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^{\mathrm{n}}$$

V prípade, že $x_0 = 0$, polynóm

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

nazývame Maclaurinov polynóm funkcie $f(x)$.

Definícía 8. Taylorov rad. Ak je funkcia $f(x)$ definovaná v istom okolí bodu x_0 a má v bode x_0 derivácie všetkých rádov, potom pre Taylorov rad funkcie $f(x)$ o strede x_0 platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Zvyšok po k-tom člene tohto radu pre $k \geq 0$ má tvar

$$R_{k+1}(x) := f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Rad považujeme za reálny Taylorov rad za predpokladov, že funkcia $f(x)$ je reálna funkcia reálnej premennej, že $x_0 \in R$ a že derivácie sú „podľa reálnej premennej". O komplexný Taylorov rad sa jedná v prípade, že $f(x)$ je komplexná funkcia komplexnej premennej, $x_0 \in C$ a derivácie sú „podľa komplexnej premennej".

V prípade, že $x_0 = 0$, mocninný rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$$

nazývame Maclaurinov rad funkcie $f(x)$. [2][3]

1.3 Trigonometrické rady

Často sa stretávame s veličinami a dejmi, ktoré sa periodicky opakujú, napríklad kmitanie sústav, pravidelné striedanie atómov v kryštáľovej mriežke alebo pohyb piestu vo výbušnom motore. Trigonometrické rady a hlavne ich špeciálny prípad Fourierove rady majú veľký význam pri popise a štúdiu takýchto periodických dejov. V technickej praxi sa trigonometrické Fourierove rady najčastejšie využívajú pri riešení diferenciálnych a integrálnych rovníc.

Definícia 9. Trigonometrický rad. Ak sú dané dve postupnosti reálnych čísel $(a_n)_0^\infty$, $(b_n)_0^\infty$ a číslo $L > 0$, potom výraz

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad kde \quad x \in (-\infty, \infty)$$

nazývame trigonometrickým radom v základnom tvare.

Číslo a_0 nazývame absolútnym členom radu a trigonometrický dvojčlen

$$\omega_n(x) = a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

nazývame n-tým členom radu. [3]

1.3.1 Fourierov rad na intervale 2π

Funkciu $f(x)$ definovanú na intervale $-\pi \leq x \leq \pi$ rozvinieme v rad trigonometrických funkcií

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Prvý člen (absolútny) je označený $\frac{a_0}{2}$ len z formálneho dôvodu, aby sa dali všetky koeficienty a_n počítať podľa jednotného vzorca. Takéto vyjadrenie má praktické využitie len v prípade, že pre danú funkciu $f(x)$ môžeme nájsť všetky koeficienty a_0,a_n, b_n. Pre výpočet týchto koeficientov využívame tzv. ortogonality funkcií $\sin nx$, $\cos nx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx \, dx = 0 \quad pre\ n, k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \begin{cases} 0, pre\ n \neq k; \\ \pi, pre\ n = k \in N. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \begin{cases} 0, pre\ n \neq k; \\ \pi, pre\ n = k \in N; \\ 2\pi, pre\ n = k = 0. \end{cases}$$

Vynásobením radu trigonometrických funkcií funkciou $\sin kx$ ($\cos kx$), zintegrovaním a použitím ortogonality získame

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \sin kx \, dx = \pi\, b_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos kx \, dx = \begin{cases} \pi a_k, pre\ k \neq 0; \\ 2\pi a_0, pre\ k = 0. \end{cases}$$

Z týchto vyjadrení získame vzťahy pre určenie jednotlivých koeficientov

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ak je funkcia $f(x)$ rozložiteľná v rovnomerne konvergentný trigonometrický rad, potom tento rad nazývame Fourierov rad funkcie $f(x)$ a koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$

sú Fourierovými koeficientami funkcie $f(x)$.

1.3.2 Fourierov rad na ľubovolnom intervale

V teoretických úvahách o Fourierových radoch je výhodné vyšetrovať rozvoj funkcie $f(x)$ do Fourierovho radu na intervale $(-\pi, \pi)$, zatiaľ čo v praxi je to ľubovolný interval (a, b) dĺžky $2L$, ktorý transformujeme na interval $(-L, L)$ alebo $(0,2L)$.

V rozvoji

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0)$$

platnom pre interval $-\pi < x < \pi$ urobíme substitúciu

$$x_0 = \frac{\pi x}{L}$$

čím dostaneme hľadaný rozvoj na intervale $-L < x < L$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)].$$

Pre Fourierove koeficienty potom platí

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Pre rozvoj na intervale $(0,2L)$ platia obdobné vzťahy

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{0}^{2L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{0}^{2L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (n = 1, 2, \dots). [4]$$

1.3.3 Párny a nepárny Fourierov rad

Definícia 10. Sínusový rad. Ak je periodická funkcia $f(x)$ na intervale $(-\pi, \pi)$ nepárna a integrabilná, sú všetky koeficienty $a_n = 0$ pre všetky $n \geq 0$ a pre koeficienty b_n platí

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx\,, \quad pre\ \forall n \in N.$$

Potom má funkcia $f(x)$ tvar

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

a nazývame ju nepárny alebo sínusový Fourierov rad funkcie $f(x)$.

Definícia 11. Kosínusový rad. Ak je periodická funkcia $f(x)$ na intervale $(-\pi, \pi)$ párna a integrabilná, sú všetky koeficienty $b_n = 0$ pre všetky $n \in N$, zatiaľ čo pre koeficienty a_n platí

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx\,, \quad pre\ \forall n \geq 0.$$

Potom má funkcia $f(x)$ tvar

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

a nazývame ju párny alebo kosínusový Fourierov rad funkcie $f(x)$. [2]

1.3.4 Fourierov rad v komplexnom tvare

Fourierov rozvoj môže nadobúdať aj iný tvar, ktorý je výhodný v obecných úvahách, ako aj v mnohostranných aplikáciách. Prepis do tohto tvaru spočíva vo vyjadrení trigonometrických funkcií

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

pomocou Eulerových vzorcov

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$

Tieto vzťahy dosadíme do

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)],$$

odkiaľ dostaneme hľadaný tvar

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}},$$

v ktorom pre jednotlivé koeficienty platí

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0,$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),$$

$$c_{-n} = c_n^*,$$

kde c_n^* značí komplexne združené číslo ku komplexnému čísluc_n.

1.3.5 Konvergecia Fourierových radov

V tomto odstavci budú popísané dve jednoduché kritériá konvergencie Fourierových radov. Prvým z nich je Dirichletovo-Jordanovo kritérium, ktoré zároveň patrí medzi najdôležitejšie.

Veta 8. Dirichletovo-Jordanovo kritérium. Ak je daná funkcia $f(x) \in P(2\pi)$ po častiach spojitá v istom intervale $\langle a, b \rangle$, platia tieto tvrdenia

1. Pre každé $x \in (a, b)$ je súčet $s(x)$ Fourierovho radu funkcie $f(x)$ v bode x rovný
   $$\frac{1}{2}\big(f(x+) + f(-x)\big),$$
   ak je $f(x)$ v bode x spojitá, je $s(x) = f(x)$.
   Ak je $b - a \geq 2\pi$, má Fourierov rad funkcie $f(x)$ uvedený súčet v každom bode $x \in R$.
2. Ak je funkcia $f(x)$ v intervale $\langle a, b \rangle$ spojitá, konverguje jej Fourierov rad v (a, b) lokálne rovnomerne.
   Ak je $b - a \geq 2\pi$ konverguje Fourierov rad funkcie $f(x)$ rovnomerne v celom R.

Nasledujúca veta udáva podmienky, ktoré zaručujú, že Fourierov rad danej funkcie $f(x)$ rovnomerne konverguje k tejto funkcii.

Veta 9. Nech je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a zároveň je jej derivácia $f'(x)$ na tomto intervale po častiach spojitá. Potom Fourierov rad funkcie $f(x)$ konverguje rovnomerne ku funkcii $f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$. [2]

1.3.6 Periodické predĺženie funkcie

Periodické predĺženie je často vytvárané postupom, ktorý graficky znamená, že graf funkcie zadanej na intervale konečnej dĺžky sa posúva vpravo alevo vľavo postupne o dĺžku tohto intervalu a táto dĺžka sa zároveň stáva periódou takto rozšírenej funkcie na celú osu R. Funkcia môže byť predĺžená na intervaloch rôznych dĺžok. Nech je $f(x)$ po častiach spojitá na intervale napríklad $(-\pi, \pi)$. Potom funkciu $f^*(x)$ nazývame

2π-periodické predĺženie funkcie $f(x)$, ak

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in \big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big),\ \ k \in Z, \\ \frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)], & x = (2k+1)\pi,\ \ k \in Z. \end{cases}$$

Ak Fourierov rad funkcie $f(x)$ konverguje na intervale $(-\pi, \pi)$ k funkcii určenej vetou 8, potom tento rad konverguje na $(-\infty, \infty)$ k 2π-periodickému predĺženiu $f^*(x)$ funkcie $f(x)$. [6][11]

1.3.7 Využitie Fourierových radov

1.3.7.1 Parciálne diferenciálne rovnice

Fyzikálny význam problému. Na koncoch upevnená struna (dokonale ohybné vlákno) dĺžky l je vychýlená do polohy $\varphi_0(x)$ a z tejto polohy je v čase uvolnená. V čase $t = 0$ má počiatočnú rýchlosť $\varphi_1(x)$. Máme určiť z rovnice pre kmitanie struny výchylku $u(x, t)$ pre každé x $(0 \le x \le l)$ a t $(t \ge 0)$.

Hľadáme teda funkciu $u(x, t)$ vyhovujúcu rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2}\,(0 < x < l, t > 0),$$

spojitú v uzavrenej oblasti $\overline{\Omega}\ (0 \leq x \leq l, t \geq 0)$ a splňujúcu tieto počiatočné a okrajové podmienky

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x),$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0.$$

Riešenie $u(x,t)$ bude v tvare

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{l} + b_n \sin\frac{n\pi t}{l}\right)$$

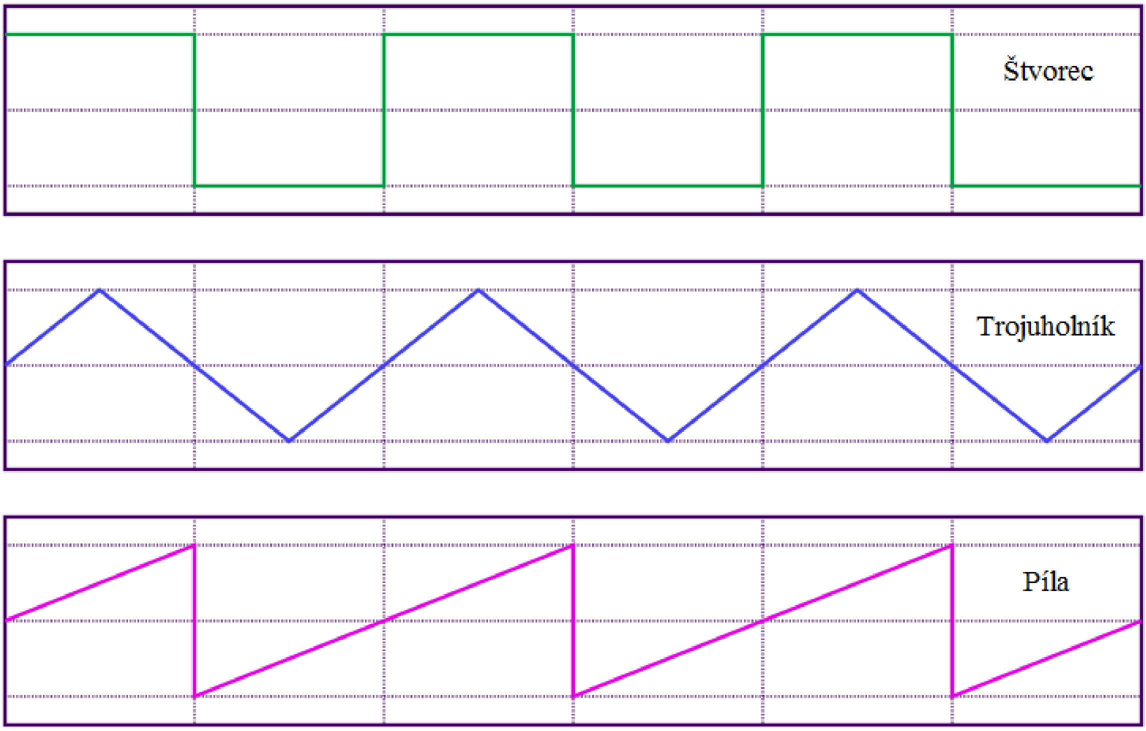
kde koeficienty a_n, b_n určíme podľa vzťahov

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x) cos\frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^l \varphi_1(x) sin\frac{n\pi x}{l} dx. [5][9]$$

1.3.7.2 Súvislosť Fourierových radov s vlnami

Fourierovým radom určitých funkcií periodicky predĺžených na danom intervale môžeme popísať napríklad niektoré známe jednoduché vlny zobrazené na obrázku 1. Medzi tieto vlny patria napríklad pílovité vlny, štvorcové vlny alebo vlny trojuholníkové. Pílovité vlny sú známe napríklad pre ich použitie v hudbe pri zvukovej syntéze spolu s vlnami štvorcovými. Štvorcové vlny sa ďalej všeobecne vyskytujú v dvojúrovňových spínacích obvodoch. V praktickej časti na príkladoch ukážeme že rozvoj niektorých funkcií do Fourierovho radu popisuje práve tieto jednoduché vlny. [10]



Obrázok 1: Priebehy známych jednoduchých vĺn

2 APROXIMÁCIA FUNKCIE

Štúdium aproximácií funkcií je jedným zo základných úloh numerických metód matematickej analýzy. Aproximácia spočíva v nahradení danej funkcie $f(x)$ inou funkciou $\varphi(x)$, ktorá vo vhodnom zmysle napodobňuje funkciu $f(x)$ a ľahko sa pritom matematicky spracováva. Funkcia $\varphi(x)$ je aproximáciou funkcie $f(x)$. Pri výbere vhodnej aproximácie postupujeme tak, že vopred zvolíme tvar aproximujúcej funkcie, v ktorej vystupujú určité premenné parametre, ktorých hodnoty sa snažíme určiť tak, aby výsledná aproximácia vyhovovala naším požiadavkám. Obecne určíme systém jednoduchých základných funkcií $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ a funkciu $f(x)$ aproximujeme lineárnou kombináciou týchto základných funkcií

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x).$$

Aproximácia potom spočíva v určení hodnôt parametrov $c_0, c_1, \dots, c_n$ podľa kritéria vhodného pre konkrétnu úlohu.

2.1 Aproximácia Taylorovým polynómom

Túto aproximáciu použijeme, ak chceme aproximovať chovanie funkcie v malom okolí bodu. Predpokladajme, že daná funkcia $f(x)$ má v bode x_0 aspoň n derivácií, a že ich hodnoty v bode x_0 poznáme. Funkcia $\varphi(x)$, ktorá čo najlepšie napodobňuje chovanie funkcie $f(x)$ má podmienku

$$\varphi^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

čo znamená, že hodnoty derivácií funkcií $f(x)$ a $\varphi(x)$ v bode x_0 sú rovnaké až do rádu n. Túto podmienku splňuje Taylorov polynóm

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Pre chybu aproximácie Taylorovým polynómom platí

$$e(x) = f(x) - T_n(x) = f^{n+1}(\varepsilon)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \varepsilon \in U(x_0).$$

Ak dokážeme odhadnúť $n + 1$ derivácií funkcie $f(x)$ na danom okolí bodu x_0, môžeme urobiť odhad chyby aproximácie:

Ak platí $|f^{n+1}(x)| \leq M \quad \forall x \in U(x_0)$, potom $|e(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$.

2.2 Aproximácia interpolačným polynómom

Takúto aproximáciu využívame pri aproximácii funkcie, ktorá je daná svojimi hodnotami v $n+1$ bodoch x_i, $i = 0, 1, \dots, n$ (body x_i nazývame uzly interpolácie), a požadujeme, aby aproximačná funkcia presne prechádzala zadanými bodmi. Pomocou aproximácie získame približné hodnoty zadanej funkcie v ľubovolnom bode intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$. Interpolačný polynóm $\varphi(x)$ bude stupňa n (polynóm n-tého stupňa má $n+1$ koeficientov).

2.2.1 Lagrangeov interpolačný polynóm

Jedným z postupov určenia interpolačného polynómu je tzv. Lagrangeov interpolačný polynóm. Hľadaný polynóm $L_n(x)$ n-tého stupňa musí splňovať interpolačné podmienky

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Lagrangeov interpolačný polynóm hľadáme v tvare

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x),$$

kde $l_i(x)$ sú elementárne polynómy Lagrangeovej interpolácie n-tého stupňa, pre ktoré platí

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{matrix} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{matrix}.$$

Každý polynóm $l_i(x)$ má koreňe $x_0, x_1, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ a nadobúda hodnotu 1 v bode x_i. Pre jeho určenie používame tvar

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

2.2.2 Newtonov interpolačný polynóm

Ďalším spôsobom určenia interpolačného polynómu je tzv. Newtonov interpolačný polynóm. Interpolačný polynóm $N_n(x)$ n-tého stupňa splňujúci interpolačné podmienky

$$N_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

volíme v tvare

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Jednotlivé koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ získame dosadzovaním interpolačných podmienok do predpisu polynómu

$$N_0(x_0) = a_0 = f(x_0),$$

$$N_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$N_2(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}.$$

2.2.3 Hermitov interpolačný polynóm

Polynóm $H_{2n+1}(x)$ definovaný vzorcom

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\left(f(a_i)h_i(x) + f'(a_i)\widetilde{h_\iota}(x)\right)\right],$$

sa nazýva Hermitov interpolačný polynóm, kde

$$h_i(x) = [1 - 2(x - a_i)l_i'(a_i)]l_i^2(x),$$

$$\widetilde{h_\iota}(x) = (x - a_i)l_i^2(x)$$

a $l_i(x)$ sú elementárne polynómy Lagrangeovej interpolácie. Polynóm je stupňa nanajvýš $2n + 1$ a platí

$$H_{2n+1}(a_i) = f(a_i),$$

$$H_{2n+1}'(a_i) = f'(a_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

2.3 Aproximácia trigonometrickým polynómom

Pre aproximáciu periodických funkcií nieje vhodné použiť polynómy a preto používame systém periodických základných funkcií, tzv. systém trigonometrických polynómov

$$\varphi_0(x) = 1,$$

$$\varphi_{2n-1}(x) = cos\frac{2\pi nx}{T} \qquad k = 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_{2n}(x) = sin\frac{2\pi nx}{T} \qquad k = 1, 2, \dots,$$

kde T je perióda zadanej funkcie. Počet uvažovaných základných funkcií volíme buď menší než je počet zadaných bodov, alebo rovný počtu zadaných bodov (v zmysle interpolácie).

Určenie koeficientov c_i u základných funkcií φ_i(x) z vyjadrenia

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x).$$

nazývame Fourierovou analýzou. [5] [7]

2.4 Interpolácia pomocou splajnov

Základná myšlienka interpolácie tohto typu je obdobná ako u Lagrangeovej, Newtnovej, po prípade Hermitovej interpolácie. Táto interpolácia sa líši tým, že miesto polynómu, pomocou ktorého interpolujeme danú funkciu, použijeme tzv. splajn, čo je po častiach spojitá funkcia.

2.4.1 Interpolácia Lagrangeovho typu

Klasickým splajnom stupňa k pre uzly $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ rozumieme funkciu, ktorá je na každom intervale $\langle a_i, a_{i+1}\rangle$, $i = 0, \dots, n-1$ polynóm stupňa k (rôznym v rôznych intervaloch) a ktorá má v celom intervale $\langle a_0, a_n\rangle$ spojité derivácie až do rádu $k-1$.

Interpoláciou danej funkcie $f(x)$ klasickým splajnom stupňa k pre uzly $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ rozumieme splajn $f_s(x)$ stupňa k, pre ktorý platí

$$f_s(a_i) = f(a_i) \quad i = 0, \dots, n.$$

Najpoužívanejším klasickým splajnom je splajn 3. stupňa, ktorý sa nazýva kubický splajn.

2.4.2 Interpolácia Hermitovho typu

Hermitovým splajnom stupňa $2k-1$ $(k \geq 1)$ pre uzly $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ rozumieme funkciu, ktorá je v každom intervale $\langle a_i, a_{i+1}\rangle$, $i = 0, \dots, n-1$, rovná polynómu stupňa nanajvýš $2k-1$ a ktorá má v celom intervale $\langle a, b\rangle$ spojité derivácie do rádu $k-1$.

Nech má funkcia $f(x)$ v intervale $\langle a, b\rangle$ $k-1$ spojitých derivácií, nech je $a = a_0 <$ $< a_1 < \cdots < a_n = b$ ľubovolné delenie tohto intervalu a nech je k ľubovolné celé kladné číslo. Potom existuje práve jeden Hermitov splajn $f_s(x)$ stupňa $2k-1$, pre ktorý platí

$$f_s^{(j)}(a_i) = f_s^{(j)}(a_i), \; i = 0, \dots, n, \; j = 0, \dots, k-1.$$

II. PRAKTICKÁ ČASŤ

3 SOFTVÉR MATHEMATICA

Mathematica je výpočtový softvér, používaný v mnohých vedeckých, technických, matematických a výpočetných oboroch. Je založený na symbolickej matematike. Mathematica používa vlastný programovací jazyk, tzv. Wolfram Language.

3.1 Fourierove rady

Pre Fourierove rady má softvér Mathematica niekoľko funkcií, napríklad funkcia

$$FourierSeries[f(x), t, n],$$

ktorá nám vráti Fourierov rozvoj funkcie $f(x)$ v exponenciálnom tvare o n členoch v t.

Príklad 1. Vytvorte Fourierov rad funkcie $f(x) = x$ o dvoch členoch.

Riešenie.

```
In[1]:= FourierSeries[x, x, 2]
```

$$\text{Out[1]=}\quad i\,e^{-ix} - i\,e^{ix} - \frac{1}{2}\,i\,e^{-2ix} + \frac{1}{2}\,i\,e^{2ix}$$

Ak chceme Fourierovu radu trigonometrických funkcií pre funkciu $f(x)$ o n členoch, použijeme príkaz

$$FourierTrigSeries[f(x), t, n].$$

Príklad 2. VytvorteFourierov trigonometrický rad funkcie $f(x) = x$ o dvoch členoch

Riešenie.

```
In[2]:= FourierTrigSeries[x, x, 2]
Out[2]= 2 Sin[x] - Sin[2 x]
```

V prípade, že potrebujeme Fourierov rad funkcie $f(x)$ len v tvare sínusového alebo kosínusového radu o n členoch, máme k dispozícii príkazy

$$FourierSinSeries[f(x), t, n],$$

$$FourierCosSeries[f(x), t, n].$$

Príklad 3. Vytvorte kosínusový Fourierov trigonometrický rad funkcie $f(x) = x$ o dvoch členoch.

Riešenie.

```
In[3]:= FourierCosSeries[x, x, 2]
Out[3]= π/2 - 4 Cos[x]/π
```

Keď chceme získať konkrétny koeficient Fourierovho radu, použijeme funkciu

$$FourierCoefficient[f(x), t, n],$$

ktorej výstupom je n-tý Fourierov koeficient v rozvoji funkcie $f(x)$.

Ak potrebujeme konkrétny koeficient zo sínusového alebo kosínusového Fourierovho radu funkcie $f(x)$, získame ich pomocou príkazov

$$FourierSinCoefficient[f(x), t, n],$$

$$FourierCosCoefficient[f(x), t, n],$$

ktoré nám vrátia n-tý Fourierov koeficient v sínusovom alebo kosínusovom Fourierovom rozvoji funkcie $f(x)$.

Príklad 4. Nájdite druhý koeficient sínusového Fourierovho trigonometrického radu funkcie $f(x) = x$.

Riešenie.

```
In[4]:= FourierSinCoefficient[x, x, 2]
Out[4]= -1
```

3.2 Trigonometrické výrazy

Software Mathematica nám poskytuje príkazy pre manipuláciu s trigonometrickými výrazmi. Sú to

$$TrigExpand[výraz],$$

ktorý rozloží trigonometrický $výraz$.

Príklad 5. Rozložtefunkciu $f(x) = \sin 2x$ v softvére Mathematica.

Riešenie.

```
In[5]:= TrigExpand[Sin[2 x]]
Out[5]= 2 Cos[x] Sin[x]
```

Príkaz pre redukciu výrazu na formu lineárnych trigonometrických funkcií sa zapisuje

$$TrigReduce[výraz].$$

Príklad 6. Redukujte funkciu $f(x) = 4\sin 2x * \cos^2 x$ v Mathematice.

Riešenie.

```
In[6]:= TrigReduce[4 Sin[2 x] * Cos[x] ^2]
Out[6]= 2 Sin[2 x] + Sin[4 x]
```

Pre prevod medzi exponenciálmi a trignonometrickými funkciami používame príkazy

$$TrigToExp[výraz],$$

ktorý prepisuje trigonometrické funkcie do exponenciálneho tvaru,

$$ExpToTrig[výraz],$$

ktorý naopak, prepisuje exponenciálne funkcie do tvaru trigonometrických funkcií.

Príklad 7. Vyjadrite funkciu $f(x) = 2\sin 4x$ v exponenciálnom tvare.

Riešenie.

```
In[7]:= TrigToExp[2 Sin[4 x]]
Out[7]= i e^(-4 i x) - i e^(4 i x)

In[8]:= ExpToTrig[i e^(-4 i x) - i e^(4 i x)]
Out[8]= 2 Sin[4 x]
```

3.3 Interpolácia

Prostredie Mathematica nám poskytuje príkaz aj pre bodovú interpoláciu funkcií

$$Interpolation[\{f_1, f_2, \dots\}],$$

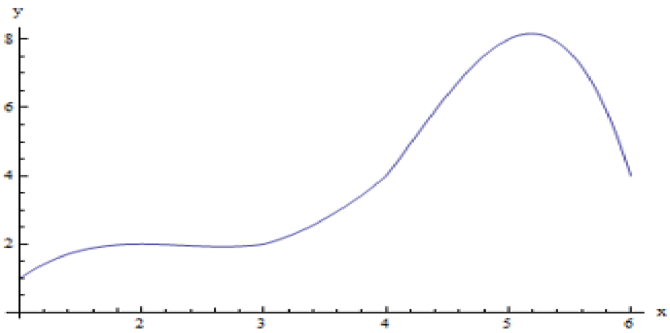
$$Interpolation[\{\{x_1, f_1\}, \{x_2, f_2\}, \dots\}],$$

ktorý skonštruuje aproximačnú funkciu, ktorá interpoluje podľa zadaných funkčných hodnôt $\mathrm{f1}, \mathrm{f2}, \dots, \mathrm{fn}$ odpovedajúcich buď $x_n = 1, 2, \dots, n$, alebo zadaným x_n.

Príklad 8. Zostrojte interpolačnú funkciu pre funkciu zadanú svojimi funkčnými hodnotami $f(x) = \{1,2,2,4,8,4\}$.

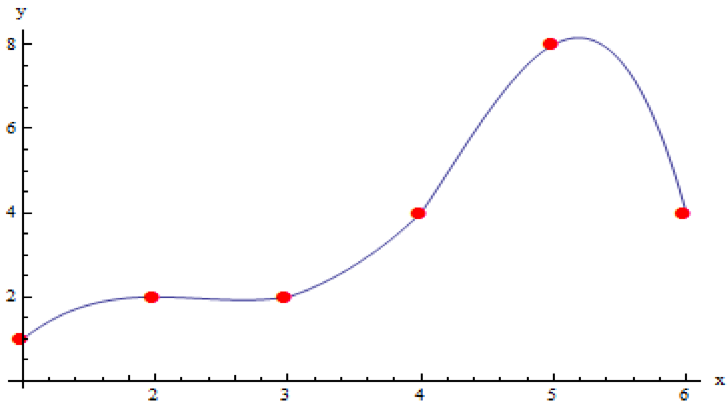
Riešenie.

```
In[9]:= f = InterpolatingFunction[{1, 2, 2, 4, 8, 4}]
Out[9]= InterpolatingFunction[{1, 2, 2, 4, 8, 4}]
```



Obrázok 2: Interpolačná funkcia ku $f(x) = \{1,2,2,4,8,4\}$

Výslednú aproximačnú funkciu porovnáme v jednom grafe s originálnymi dátami



Obrázok 3: Porovnanie hodnôt funkcie a aproximácie

a vidíme, že interpolačná funkcia prechádza zadanými bodmi.

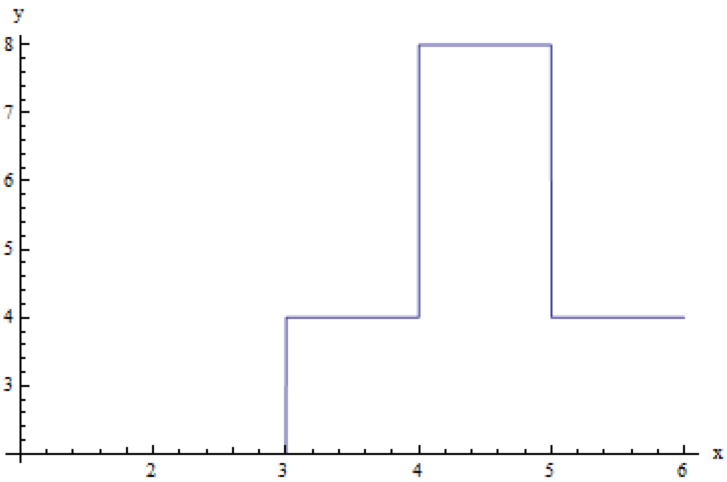
Ak si chceme vybrať rád interpolácie, Mathematica nám na poskytuje rozšírenie príkazu $Interpolation$, a to

$$InterpolationOrder \ \ \rightarrow n$$

kde n je požadovanýn rád interpolačnej funkcie.

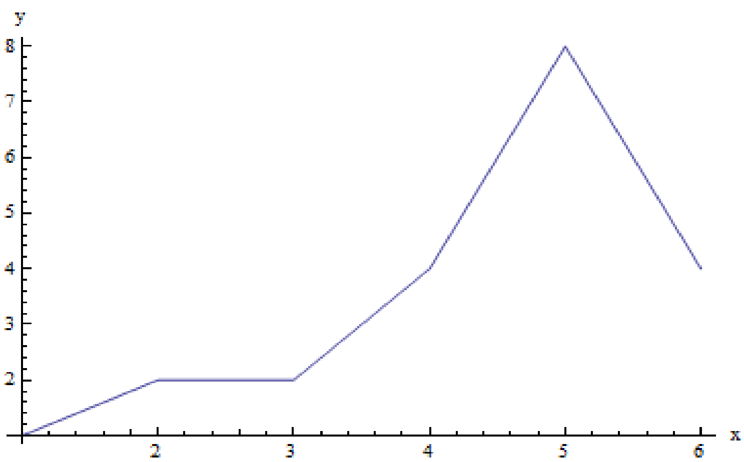
Príklad 9. Zobrazte interpolačnú funkciu rôzneho rádu na funkcii z predchádzajúceho príkladu.

Riešenie. Pre $n = 0$ vytvoríme interpolačnú funkciu 0-tého rádu



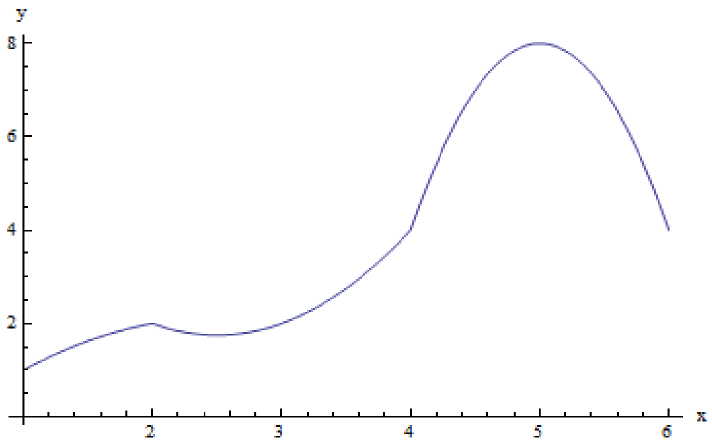
Obrázok 4: Interpolačná funkcia 0-tého rádu

Pre $n = 1$ je výstupom lineárna interpolačná funkcia



Obrázok 5: Interpolačná funkcia 1-tého rádu

Pre $n = 2$ vytvoríme kvadratickú interpolačnú funkciu



Obrázok 6: Interpolačná funkcia 2-tého rádu

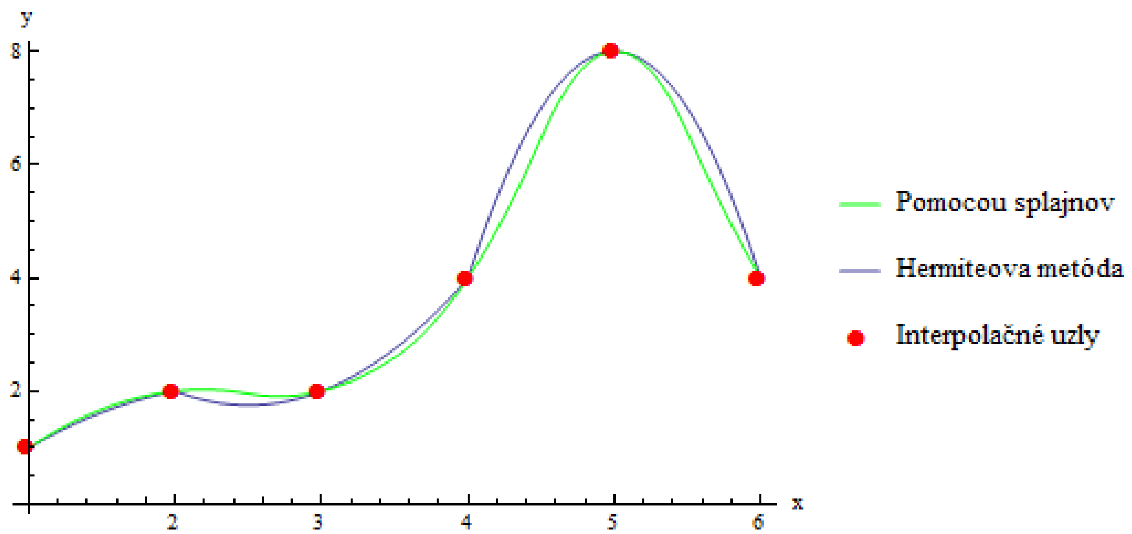
Prostredie Mathematica nám umožňuje vybrať si metódu interpolácie pomocou rozšírenia príkazu $Interpolation$, a to

$$Method \;\; \rightarrow \text{„}Názov\ metódy\text{“}.$$

Je možné napríklad použiť metódy spomínané v teoretickej časti.

Príklad 10. Zobrazte interpolačnú funkciu druhého rádu na funkcii z predchádzajúceho príkladu pomocou dvoch rôznych interpolačných metód.

Riešenie.



Obrázok 7: Porovnanie dvoch interpolačných metód

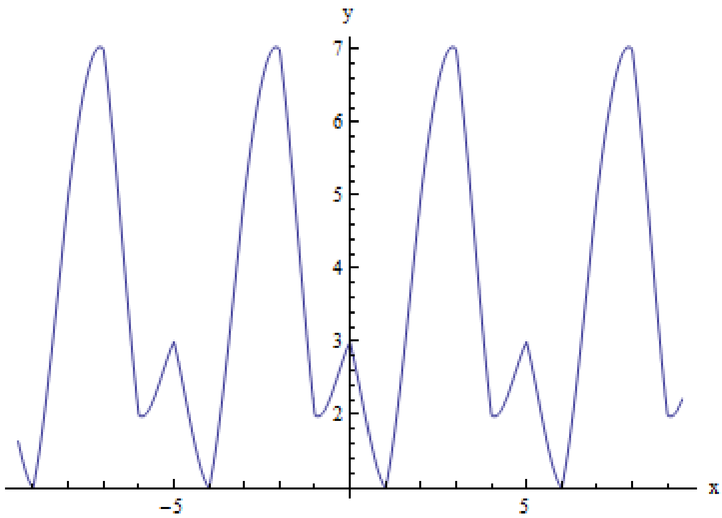
Keď chceme vytvoriť periodicky sa opakujúcu funkciu pomocou softvéru Mathematica, použijeme rozšírenie funkcie $Interpolation$, a to

$$PeriodicInterpolation \;\rightarrow True/False$$

kde $True$ znamená, že interpolácia bude periodická, $False$ naopak. [8]

Príklad 11. Pomocou softvéru Mathematica zostrojte interpolačnú funkciu opakujúcu sa periodicky ku funkcii zadanej svojimi funkčnými hodnotami $f(x) = \{1,5,7,2,3,1\}$.

Riešenie.



Obrázok 8: Periodicky opakujúca sa interpolačná funkcia k $f(x) = \{1,5,7,2,3,1\}$

3.4 Periodické predĺženie funkcie

Pri riešení príkladov sme pre vykresľovanie pôvodne neperiodických funkcií s periodickým priebehom v prostredí Mathematica použili nasledujúcu funkciu

$$myperiodic[func\_(,\{val\_Symbol, min\_(?\,NumberQ), max\_(?\,NumberQ)\,\}\,)\,] :=$$
$$:= func/(.\,(val :\rightarrow Mod[val - min, max - min] + min)\,).$$

Táto funkcia preberá ako parameter požadovanú funkciu a rozsah tejto funkcie, ktorý sa má periodicky predĺžit.

Príklad 12. Periodicky predĺžte funkciu $f(x) = -x$ na intervale $(-\pi, \pi)$ pomocou softvéru Mathematica.

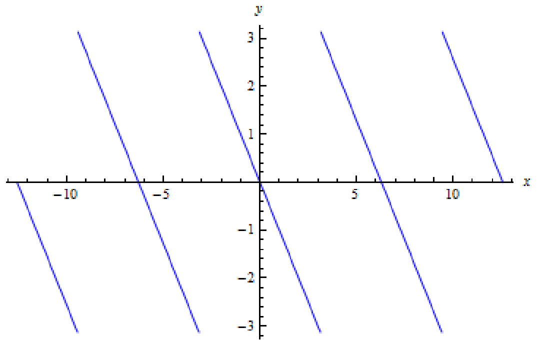
Riešenie. Použitím funkcie $myperiodic$ v nasledujúcom tvare získame periodický priebeh zadanej funkcie zobrazený na rozsahu $(-4Pi, 4Pi)$.

$Plot[myperiodic[-t, \{t, -Pi, Pi\}] //Evaluate, \{t, -4Pi, 4Pi\},$

$AxesLabel \to \{x, y\},$

$PlotLegends \to \{$"2π-periodické predĺženie f(x)"$\},$

$PlotStyle \to Blue]$



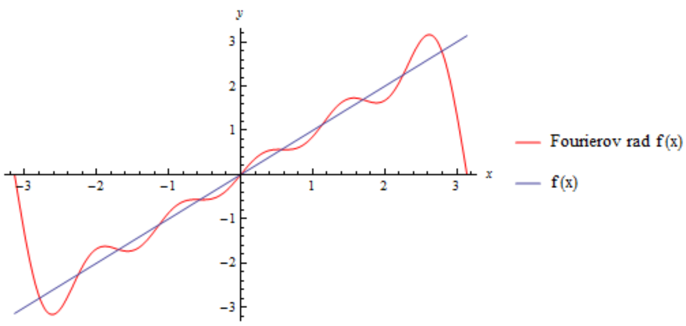
Obrázok 9: Periodické predĺženie $f(x) = -x$

3.5 Aproximácia trigonometrickým polynómom

Aproximovať rôzne funkcie $f(x)$ trigonometrickým polynómom je v softvére Mathematica možné pomocou Fourierovho radu a spomínaných príkazov príslušných tejto rade.

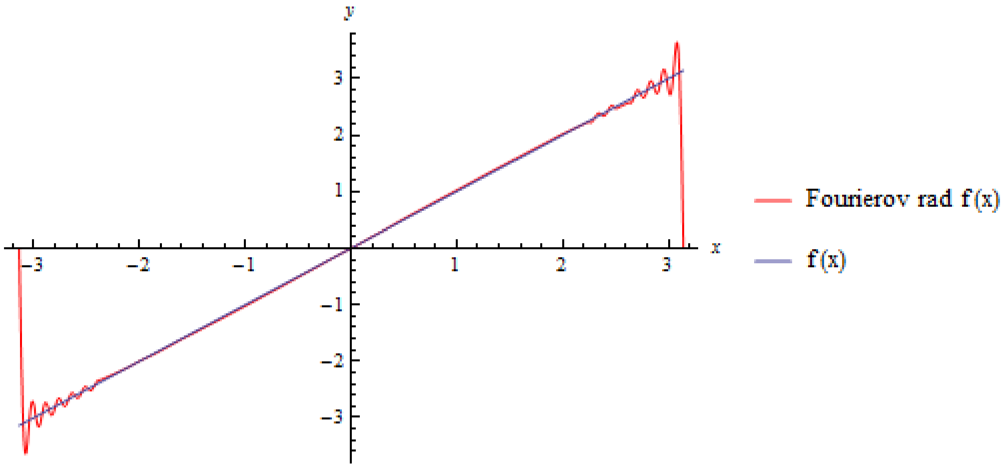
Príklad 13. Aproximujte funkciu $f(x) = x$ na intervale $(-\pi, \pi)$ trigonometrickým polynómom s rôznym počtom členov.

Riešenie. Pre počet členov $n = 5$ má výsledná aproximačná funkcia následovný priebeh



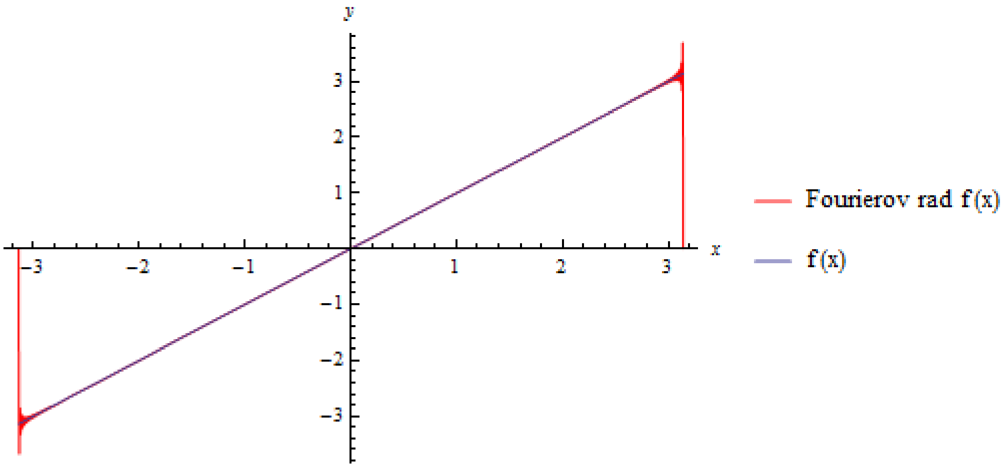
Obrázok 10: Aproximačná funkcia pre $n = 5$

Pre počet členov $n = 50$ je výsledná aproximačná funkcia viac podobná aproximovanej funkcii $f(x) = x$, no stále sú hraničné oblasti intervalu $(-\pi, \pi)$ „strapaté“. Aproximačná funkcia vyzerá nasledovne



Obrázok 11: Aproximačná funkcia pre $n = 50$

Pri počte členov $n = 500$ je už výsledná aproximačná funkcia veľmi podobná aproximovanej funkcii $f(x) = x$ a má nasledovný priebeh



Obrázok 12: Aproximačná funkcia pre $n = 500$

4 APROXIMÁCIA FUNKCIE TRIGONOMETRICKÝMI POLYNÓMAMI

4.1 Interpolácia trigonometrickým polynómom

Príklad 14. Aproximujte 2π-periodickú funkciu zadanú tabuľkou v zmysle interpolácie.

x_i	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x_i)$	12	-4	0	4

Riešenie. Aproximačný polynóm volíme v tvare

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x.$$

Zapíšeme interpolačné podmienky

$$\varphi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

čo je

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cos 2x_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cos 2x_1 \\ 1 & \cos x_2 & \sin x_2 & \cos 2x_2 \\ 1 & \cos x_3 & \sin x_3 & \cos 2x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix},$$

čo je

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos 0 & \sin 0 & \cos 0 \\ 1 & \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \pi \\ 1 & \cos \pi & \sin \pi & \cos 2\pi \\ 1 & \cos \frac{3\pi}{2} & \sin \frac{3\pi}{2} & \cos 3\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

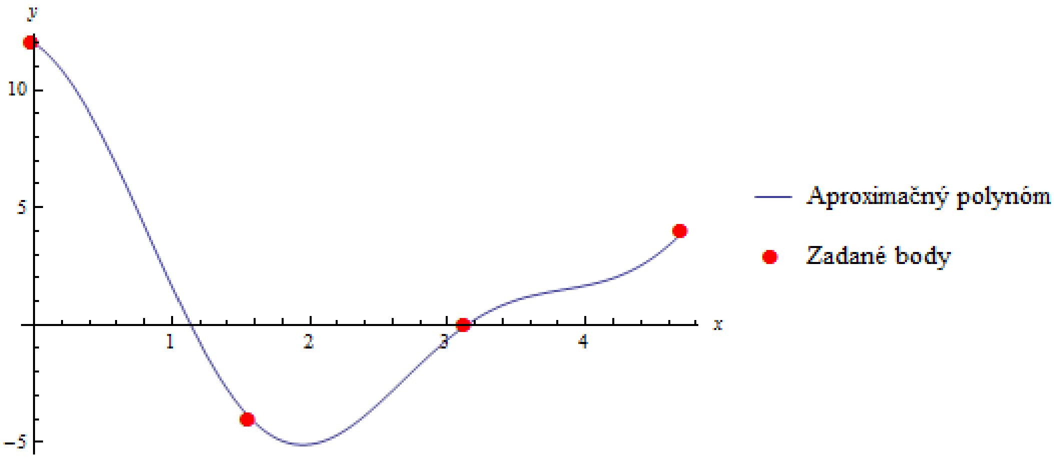
čo je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vyriešením tejto sústavy rovníc získame hľadané koeficienty $A_0 = 3$, $A_1 = 6$, $B_1 = -4$, $A_2 = 3$. Následným dosadením týchto koeficientov získame výsledný aproximačný polynóm

$$\varphi(x) = 3 + 6\cos x - 4\sin x + 3\cos 2x,$$

ktorý má nasledujúci priebeh vzhľadom k zadaným uzlom interpolácie



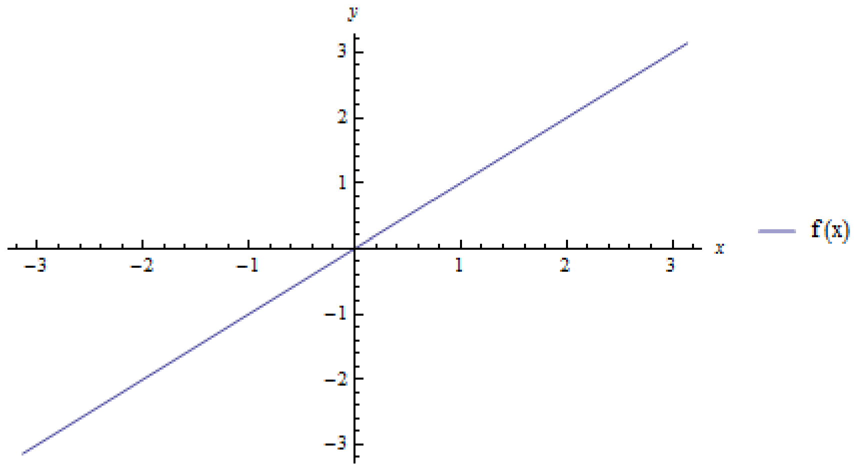
Obrázok 13: Porovnanie funkcie a aproximačného polynómu

4.2 Výpočet Fourierových radov

V tomto odstavci budú riešené príklady pre výpočet Fourierových radov vybraných funkcií a následne bude predvedená aproximácia týmito radami pre rôzny počet členov n. Ako príklady sú uvedené niektoré základné typy funkcií. Niektoré z Fourierových radov týchto funkcií popisujú známe jednoduché vlny uvedené v teoretickej časti v odstavci 1.6.3.2. Napríklad Fourierov rad funkcie $f(x) = x$ popisuje pílovité vlny, rozvoj $f(x) = sgn\, x$ zase vlny štvorcové. Trojuholníkové vlny popisuje napríklad Fourierov rad funkcie $f(x) = |x|$. Na príkladoch výpočtu Fourierovho radu funkcie $f(x) = x^2$ je ukázané, že Fourierove rady sa líšia pre rozličné dĺžky intervalov. Jednotlivé Fourierove rady môžu byť sínusové alebo aj kosínusové.

4.2.1 Fourierove rady na intervale dĺžky 2π

Príklad 15. Určite Fourierov rad funkcie $f(x) = x$ na intervale $(-\pi, \pi)$. Načrtnite jej periodické predĺženie vrátane aproximácie získanej pomocou Fourierovho radu.



Obrázok 14: Funkcia $f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$

Riešenie. Pretože je funkcia $f(x)$ na tomto intervale nepárna, pre koeficienty a_0, a_n platí

$$a_0 = a_n = 0 \quad pre\ n \in N,$$

a pre koeficienty b_n s pomocou metódy per partes získame

$$\begin{bmatrix} \sin nx & \overset{I}{\Rightarrow} & -\dfrac{\cos nx}{n} \\ x & \overset{D}{\Rightarrow} & 1 \end{bmatrix}$$

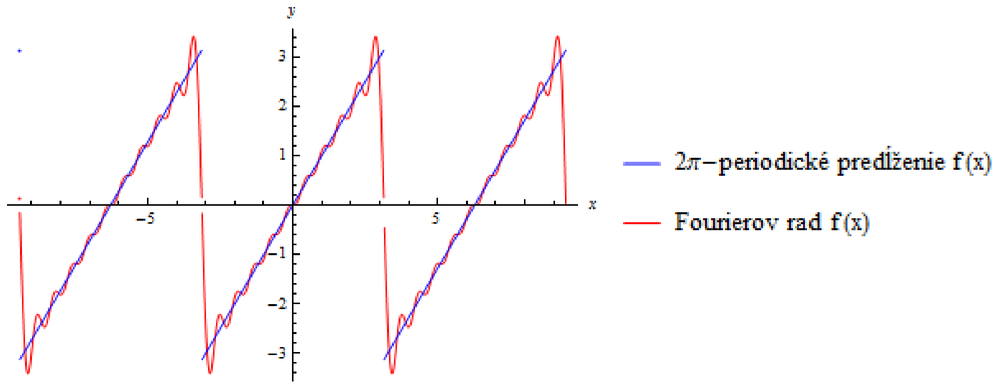
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x \cos nx}{n}\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\, dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{\pi \cos n\pi}{n} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{2}{n}(-\cos n\pi) = \frac{2}{n}(-1)^{n-1} \quad pre\ n = 1, 2, \ldots$$

Funkcii $f(x) = x$ priradíme Fourierov sínusový rad

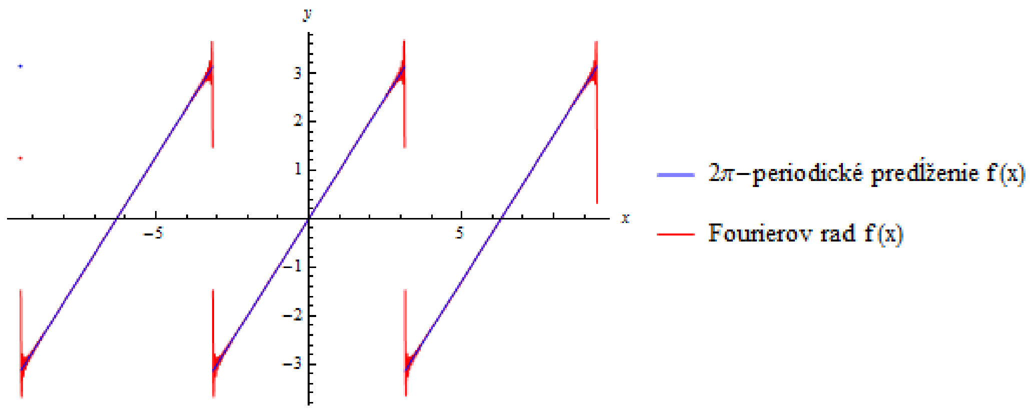
$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{n-1} \sin nx \qquad na\ (-\pi, \pi).$$

Fourierov rad funkcie $f(x) = x$ s 10 členmi aproximuje funkciu nasledovne



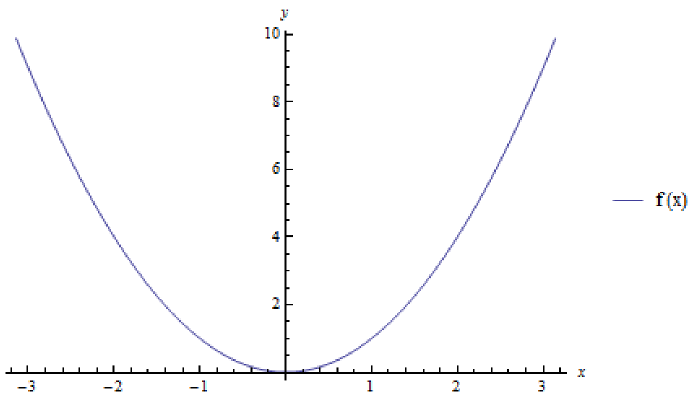
Obrázok 15: Fourierov rad $f(x) = x$ s $n = 10$

Fourierov rad funkcie $f(x) = x$ so 100 členmi aproximuje funkciu nasledovne



Obrázok 16: Fourierov rad $f(x) = x$ s $n = 100$

Príklad 16. Určite Fourierov rad funkcie $f(x) = x^2$ na intervale $(-\pi, \pi)$. Načrtnite jej periodické predĺženie vrátane aproximácie získanej pomocou Fourierovho radu.



Obrázok 17: Funkcia $f(x) = x^2$ na $(-\pi, \pi)$

Riešenie. Funkcia $f(x)$ je párna, čo znamená, že

$$b_n = 0, \ \forall n \in N.$$

Pre koeficientya_n platí

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx,$$

Dvojnásobným použitím metódy per partes

$$\begin{bmatrix} \cos nx \overset{I}{\Rightarrow} & \dfrac{\sin nx}{n} \\ x^2 \quad \overset{D}{\Rightarrow} & 2x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\sin nx}{n} & \overset{I}{\Rightarrow} & -\dfrac{\cos nx}{n^2} \\ 2x & \overset{D}{\Rightarrow} & 2 \end{bmatrix}$$

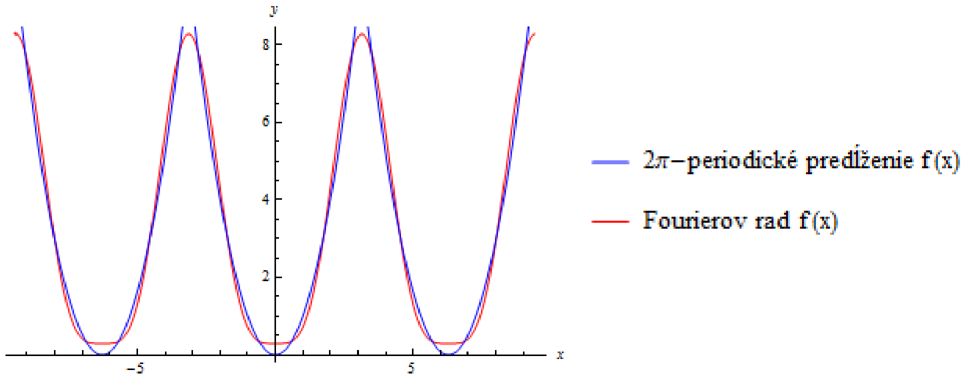
$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin nx}{n}\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(0 + \left[2x\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\frac{\cos nx}{n^2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[2x\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} - \left[2\frac{\sin nx}{n^3}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n \quad pre\ n = 1, 2, \ldots$$

Funkcii $f(x) = x^2$ priradíme kosínusový rad

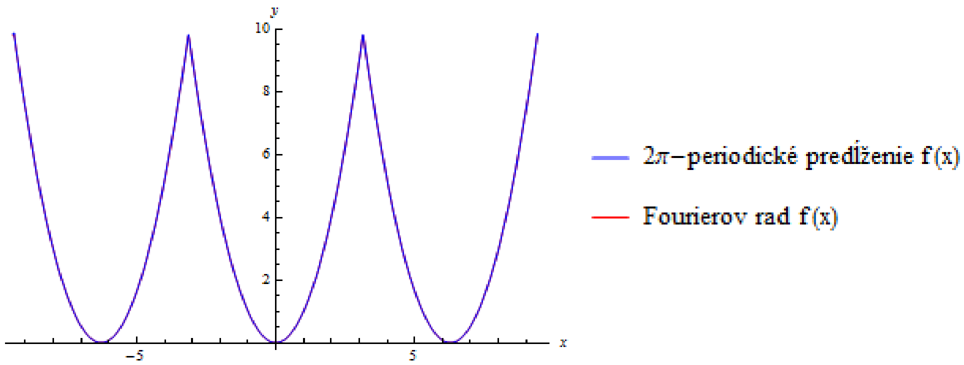
$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad na(-\pi, \pi).$$

Fourierov rad funkcie $f(x) = x^2$ s 2 členmi aproximuje funkciu nasledovne



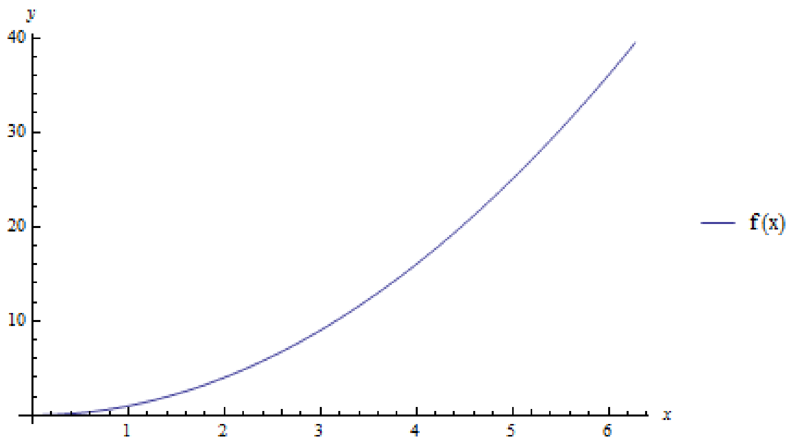
Obrázok 18: Fourierov rad $f(x) = x^2$ s $n = 2$

Fourierov rad funkcie $f(x) = x^2$ s 50 členmi aproximuje funkciu nasledovne



Obrázok 19: Fourierov rad $f(x) = x^2$ s $n = 50$

Príklad 17. Určite Fourierov rad funkcie $f(x) = x^2$ na intervale $(0, 2\pi)$. Načrtnite jej periodické predĺženie vrátane aproximácie získanej pomocou Fourierovho radu.



Obrázok 20: Funkcia $f(x) = x^2$ na $(0, 2\,\pi)$

Riešenie. Oproti predošlému prípadu teraz hľadáme Fourierov rozvoj funkcie $f(x)$ na intervale $(0, 2\pi)$, čo znamená, že funkcia nieje ani párna ani nepárna. Pre koeficienty a_n platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\, dx,$$

Dvojnásobným použitím metódy per partes

$$\begin{bmatrix} \cos nx \overset{I}{\Rightarrow} & \dfrac{\sin nx}{n} \\ x^2 \quad \overset{D}{\Rightarrow} & 2x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\sin nx}{n} & \overset{I}{\Rightarrow} & -\dfrac{\cos nx}{n^2} \\ 2x & \overset{D}{\Rightarrow} & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x\frac{\sin nx}{n}\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \left[2x\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\frac{\cos nx}{n^2}\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[2x\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} - \left[2\frac{\sin nx}{n^3}\right]_0^{2\pi}\right) = \frac{4}{n^2}\cos n2\pi = \frac{4}{n^2} \quad pre\ n = 1, 2, \dots$$

Koeficienty b_n získame opäť použitím per partes

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[-x^2\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2x\frac{\cos nx}{n}\, dx\right) =$$

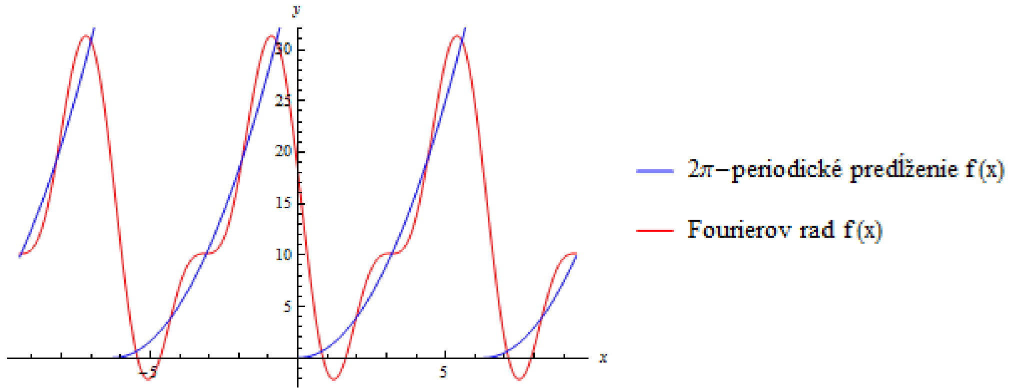
$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2}{n} + \left[2x\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\frac{\sin nx}{n^2}\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2}{n} + \left[2\frac{\cos nx}{n^3}\right]_0^{2\pi}\right) = -\frac{4\pi}{n} \quad pre\ n = 1, 2, \dots$$

Funkcii $f(x) = x^2$ priradíme Fourierov rad

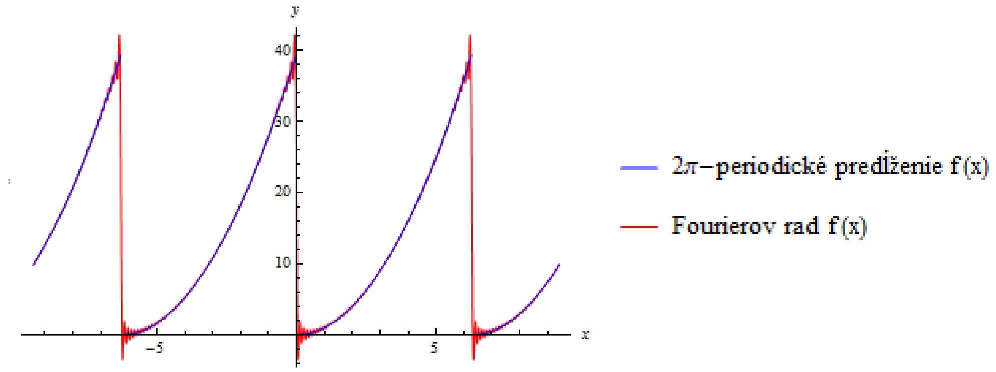
$$x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\sin nx\right) \quad na\ (0, 2\pi).$$

Fourierov rad funkcie $f(x) = x^2$ s 2 členmi aproximuje funkciu nasledovne



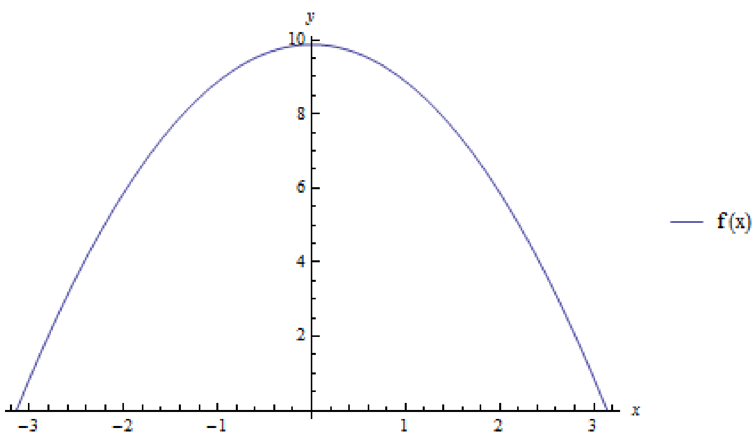
Obrázok 21: Fourierov rad $f(x) = x^2$ s $n = 2$

Fourierov rad funkcie $f(x) = x^2$ s 50 členmi aproximuje funkciu nasledovne



Obrázok 22: Fourierov rad $f(x) = x^2$ s $n = 50$

Príklad 18. Určite Fourierov rad funkcie $f(x) = \pi^2 - x^2$ na intervale $(-\pi, \pi)$. Načrtnite jej periodické predĺženie vrátane aproximácie získanej pomocou Fourierovho radu.



Obrázok 23: Funkcia $f(x) = \pi^2 - x^2$ na $(-\pi, \pi)$

Riešenie. Zadaná funkcia je párna, teda platí

$$b_n = 0, \quad pre\, n \in N.$$

Koeficienty a_0, a_n získame nasledovne

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\, dx = 2\pi\int_0^{\pi} 1\, dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = 2\pi^2 - \frac{2\pi^2}{3} = \frac{4\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[\pi^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(0 - \left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin nx}{n} dx\right) =$$

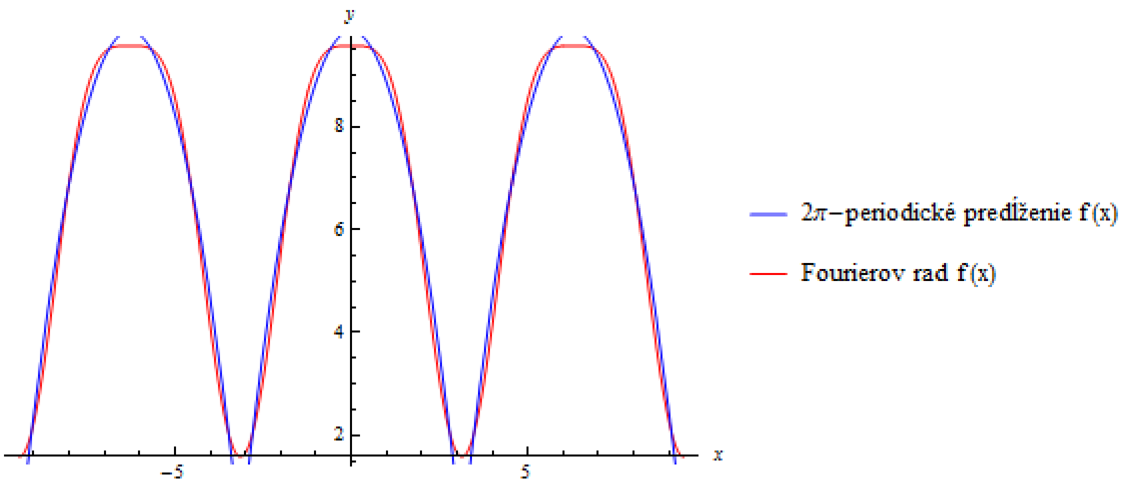
$$= \frac{2}{\pi}\left(0 + \left[-2x\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\frac{\cos nx}{n^2} dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(2\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 2\left[\frac{\sin nx}{n^3}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}.$$

Funkcii $f(x) = \pi^2 - x^2$ priradíme kosínusový rad

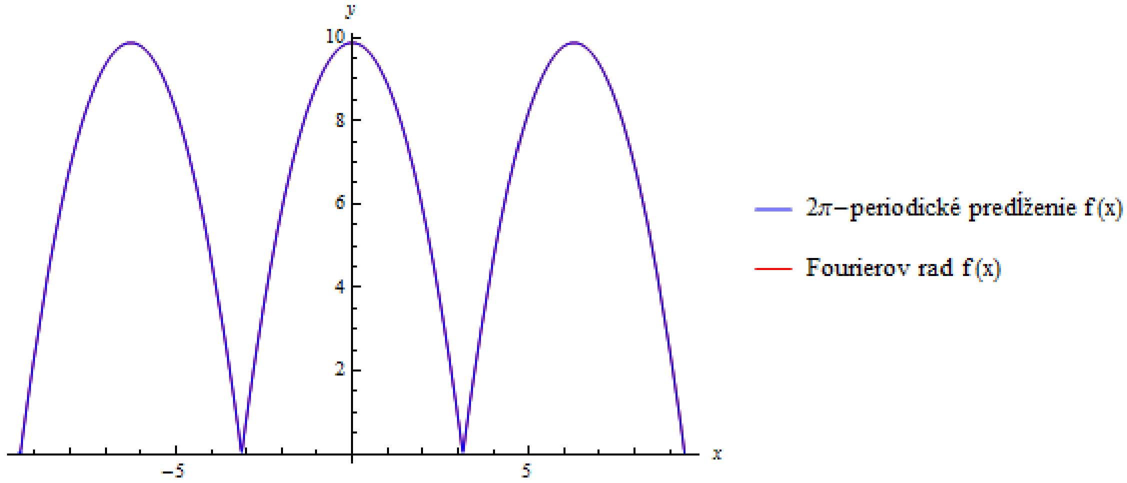
$$\pi^2 - x^2 \sim \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx \quad na\ (-\pi, \pi).$$

Fourierov rad funkcie $f(x) = \pi^2 - x^2$ s 2 členmi aproximuje funkciu nasledovne



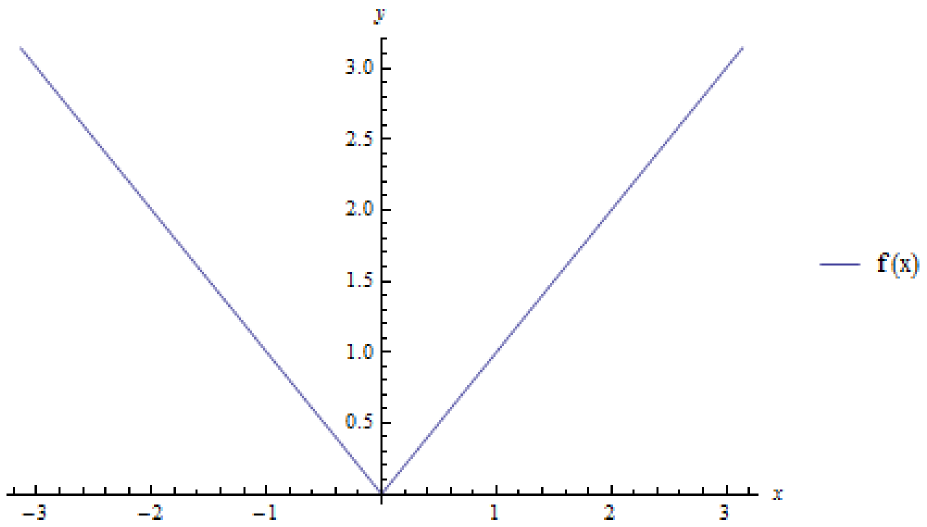
Obrázok 24: Fourierov rad $f(x) = \pi^2 - x^2$ s $n = 2$

Fourierov rad funkcie $f(x) = \pi^2 - x^2$ s 50 členmi aproximuje funkciu nasledovne



Obrázok 25: Fourierov rad $f(x) = \pi^2 - x^2$ s $n = 50$

Príklad 19. Určite Fourierov rad funkcie $f(x) = |x|$ na intervale $(-\pi, \pi)$. Načrtnite jej periodické predĺženie vrátane aproximácie získanej pomocou Fourierovho radu.



Obrázok 26: Funkcia $f(x) = |x|$ na $(-\pi, \pi)$

Riešenie. Táto funkcia je párna na $(-\pi, \pi)$ a teda koeficienty

$$b_n = 0$$

a pre koeficienty a_0, a_n platí

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \pi,$$

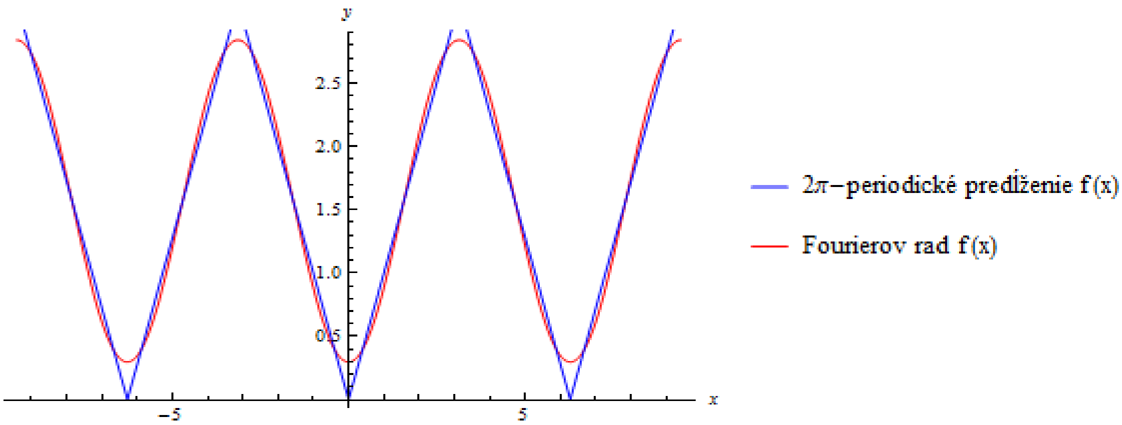
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] \quad pre\ n = 1, 2, \dots$$

Funkcii $f(x) = |x|$ priradíme kosínusový rad

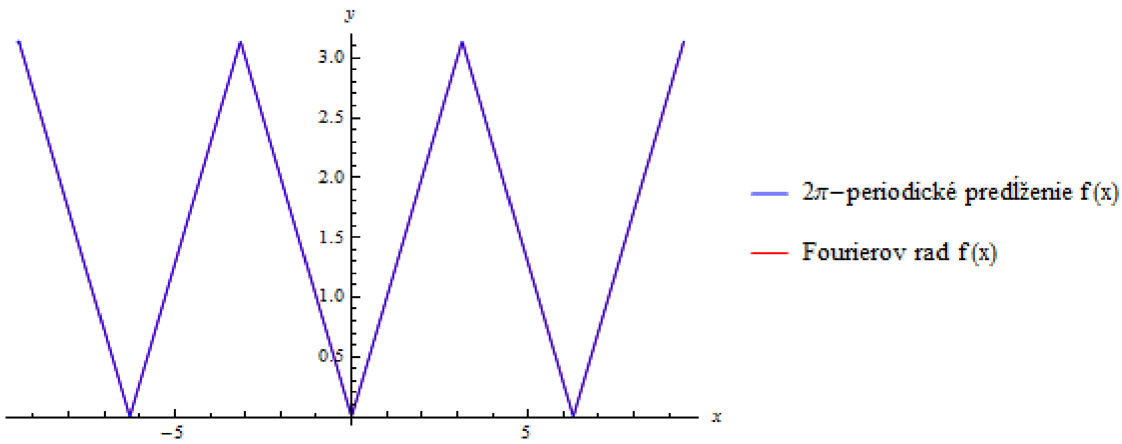
$$|x| \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[(-1)^n - 1]\cos nx \quad na\ (-\pi, \pi).$$

Fourierov rad funkcie $f(x) = |x|$ s 10 členmi aproximuje funkciu nasledovne



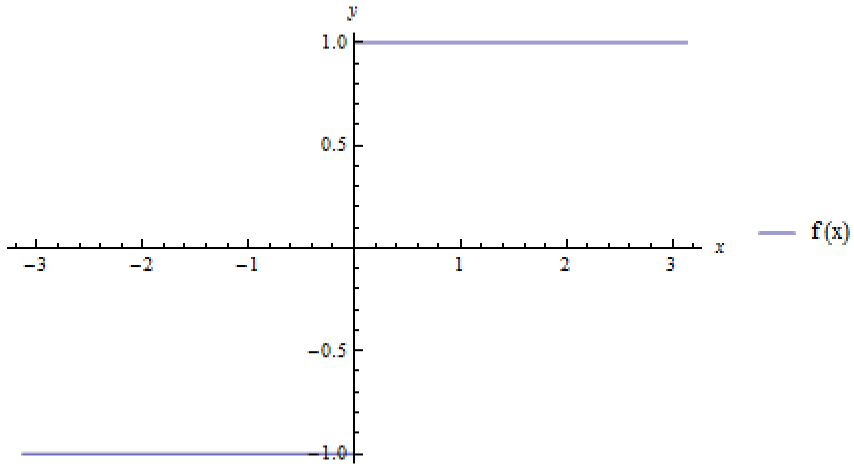
Obrázok 27: Fourierov rad $f(x) = |x|$ s $n = 10$

Fourierov rad funkcie $f(x) = |x|$ s 50 členmi aproximuje funkciu nasledovne



Obrázok 28: Fourierov rad $f(x) = |x|$ s $n = 50$

Príklad 20. Určite Fourierov rad funkcie $f(x) = sgn\ x$ na intervale $(-\pi, \pi)$. Načrtnite jej periodické predĺženie vrátane aproximácie získanej pomocou Fourierovho radu.



Obrázok 29: Funkcia $f(x) = sgn\ x$ na $(-\pi, \pi)$

Riešenie. Zadaná funkcia je nepárna a teda pre koeficienty a_0, a_n platí

$$a_0 = a_n = 0.$$

Pre jednotlivé koeficienty b_n potom platí

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} sgn\, x \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-1) \sin nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1 \sin nx\, dx$$

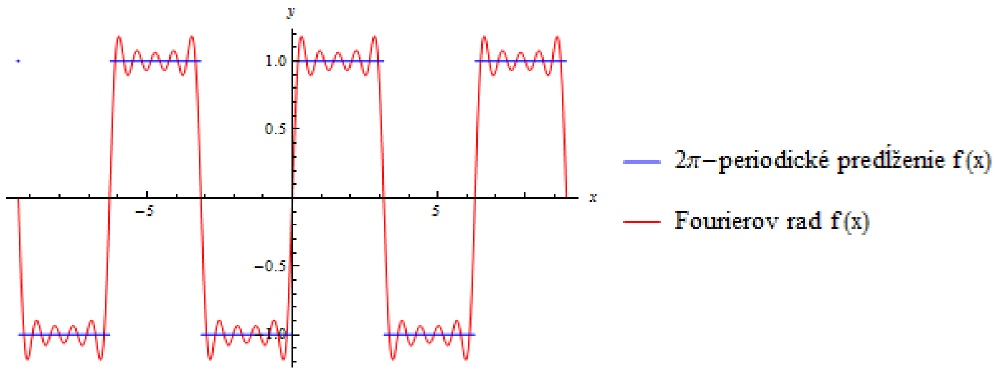
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi n}(1 - (-1)^n) - \frac{1}{\pi n}((-1)^n - 1) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}(1 - (-1)^n) + \frac{1}{\pi n}(1 - (-1)^n) = \frac{2}{\pi n}(1 - (-1)^n) \quad pre\ n = 1, 2, \ldots$$

Funkcii $f(x) = sgn\ x$ priradíme sínusový rad

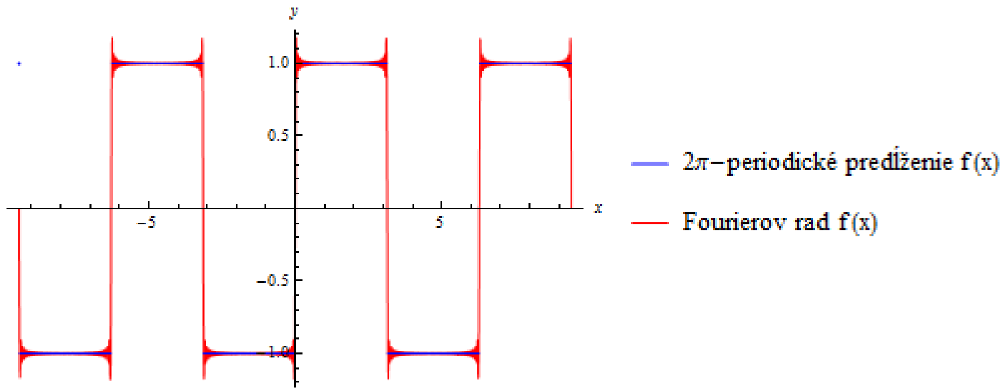
$$sgn\ x \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1 - (-1)^n) \sin nx \quad na\ (-\pi, \pi).$$

Fourierov rad funkcie $f(x) = sgn\ x$ s 10 členmi aproximuje funkciu nasledovne



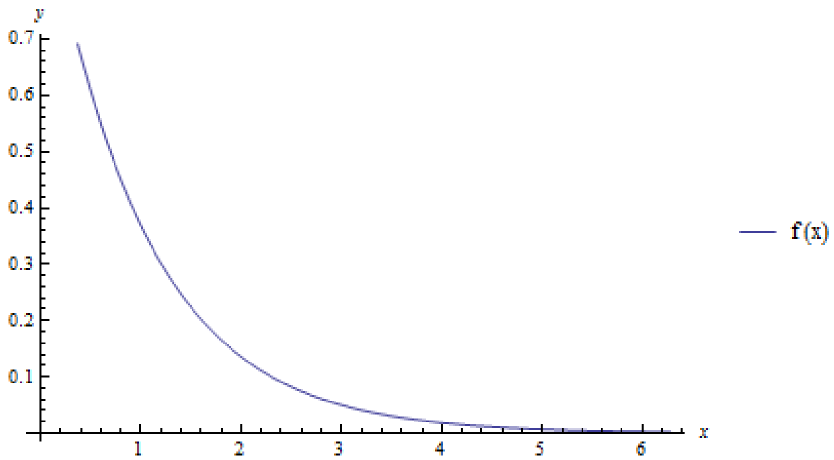
Obrázok 30: Fourierov rad $f(x) = sgn\ x$ s $n = 10$

Fourierov rad funkcie $f(x) = sgn\ x$ s 100 členmi aproximuje funkciu nasledovne



Obrázok 31: Fourierov rad $f(x) = sgn\ x$ s $n = 100$

Príklad 21. Určite Fourierov rad funkcie $f(x) = e^{-x}$ na intervale $(0, 2\pi)$. Načrtnite jej periodické predĺženie vrátane aproximácie získanej pomocou Fourierovho radu.



Obrázok 32 : Funkcia $f(x) = e^{-x}$ na $(0, 2\pi)$

Riešenie. Koeficienty a_0, a_n vypočítame

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x} dx = \frac{1}{\pi}[-e^{-x}]_0^{2\pi} = \frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos nx \, dx.$$

Aplikáciou metódy per partes

$$\begin{bmatrix} \cos nx \overset{I}{\Rightarrow} & \dfrac{\sin nx}{n} \\ e^{-x} \overset{D}{\Rightarrow} & -e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos nx \, dx = \left[\frac{e^{-x}}{n} \sin nx\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} e^{-x} \sin nx \, dx =$$

$$= \left[\frac{e^{-x}}{n} \sin nx - \frac{e^{-x}}{n^2} \cos nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos nx \, dx,$$

a po úprave dostaneme

$$\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos nx \, dx + \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos nx \, dx = \left[\frac{e^{-x}}{n} \sin nx - \frac{e^{-x}}{n^2} \cos nx\right]_0^{2\pi}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos nx \, dx = \left[\frac{e^{-x}}{n} \sin nx - \frac{e^{-x}}{n^2} \cos nx\right]_0^{2\pi},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos nx \, dx = \frac{n^2}{1 + n^2}\left[\frac{e^{-x}}{n} \sin nx - \frac{e^{-x}}{n^2} \cos nx\right]_0^{2\pi}.$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos nx \, dx = \frac{n^2}{1 + n^2}\left(-\frac{e^{-2\pi}}{n^2} \cos n2\pi + \frac{e^0}{n^2} \cos 0\right).$$

Odtiaľ

$$a_n = \frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi(1 + n^2)} \quad pre\ n = 1, 2, \ldots$$

Koeficienty b_n vypočítame

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x} \sin nx \, dx.$$

Opäť použitím per partes

$$\begin{bmatrix} \sin nx \overset{I}{\Rightarrow} & -\dfrac{\cos nx}{n} \\ e^{-x} \overset{D}{\Rightarrow} & -e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-x} \sin nx \, dx = \left[-\frac{e^{-x}}{n} \cos nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos nx \, dx =$$

$$= \left[-\frac{e^{-x}}{n} \cos nx - \frac{e^{-x}}{n^2} \sin nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} e^{-x} \sin nx \, dx.$$

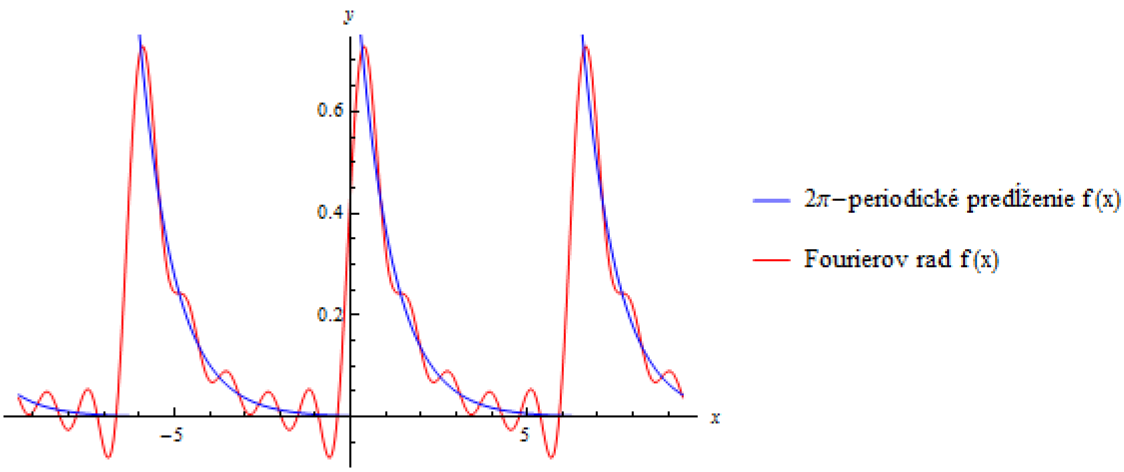
Odtiaľ podobne ako pre koeficienty a_n získame vzťah

$$b_n = \frac{n(1-e^{-2\pi})}{\pi(1+n^2)} \quad pre\ n = 1, 2, \ldots.$$

Funkcii $f(x) = e^{-x}$ priradíme Fourierov rad

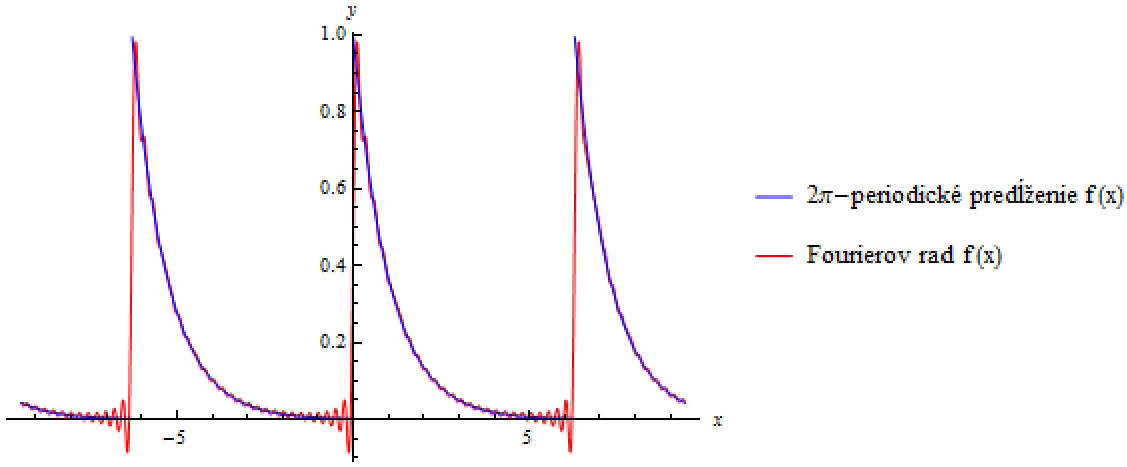
$$e^{-x} \sim \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+n^2} \cos nx\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{1+n^2} \sin nx\right)\right] \quad na\ (0, 2\pi).$$

Fourierov rad funkcie $f(x) = e^{-x}$ s 5 členmi aproximuje funkciu nasledovne



Obrázok 33: Fourierov rad $f(x) = e^{-x}$ s $n = 5$

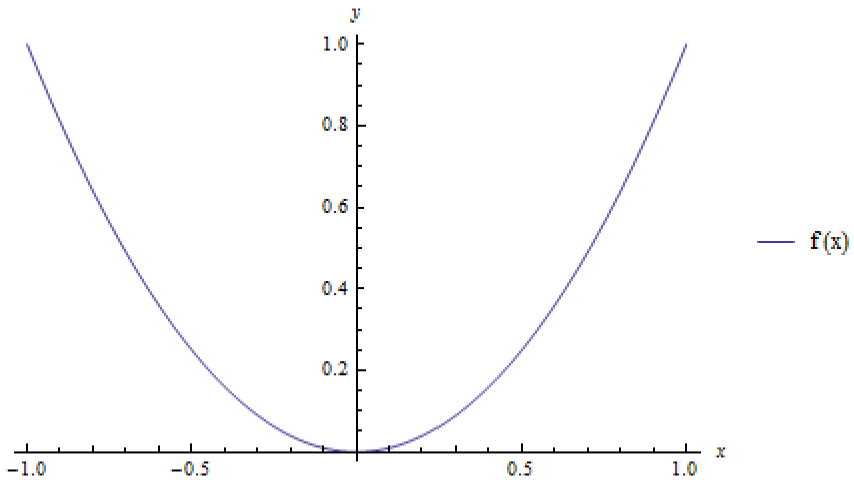
Fourierov rad funkcie $f(x) = e^{-x}$ s 25 členmi aproximuje funkciu nasledovne



Obrázok 34: Fourierov rad $f(x) = e^{-x}$ s $n = 25$

4.2.2 Fourierove rady na ľubovolnom intervale

Príklad 22. Určite Fourierov rad funkcie $f(x) = x^2$ na intervale $(-1, 1)$. Načrtnite jej periodické predĺženie vrátane aproximácie získanej pomocou Fourierovho radu.



Obrázok 35: Funkcia $f(x) = x^2$ na $(-1,1)$

Riešenie. Funkcia $f(x)$ je na tomto intervale párna, čo znamená, že

$$b_n = 0, \quad \forall n \in N.$$

Pre koeficientya_n platí

$$a_0 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3},$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} x^2 \cos n\pi x \, dx,$$

Dvojnásobným použitím metódy per partes

$$\begin{bmatrix} \cos n\pi x \overset{I}{\Rightarrow} & \dfrac{\sin n\pi x}{n\pi} \\ x^2 \quad \overset{D}{\Rightarrow} & 2x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\sin n\pi x}{n\pi} & \overset{I}{\Rightarrow} & -\dfrac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2} \\ 2x & \overset{D}{\Rightarrow} & 2 \end{bmatrix}$$

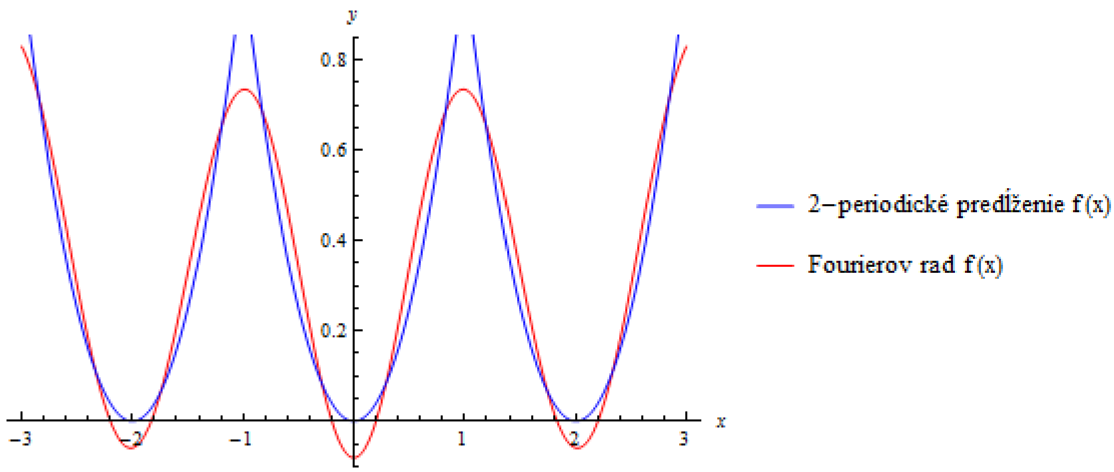
$$a_n = \left[x^2 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2x \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \, dx = 0 + \left[2x \frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2 \frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2} \, dx =$$

$$= \frac{4 \cos n\pi}{n^2\pi^2} - \left[2 \frac{\sin n\pi x}{n^3\pi^3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4 \cos n\pi}{n^2\pi^2} - 0 = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} pre \; n = 1, 2, \ldots$$

Funkcii $f(x) = x^2$ priradíme Fourierov rad

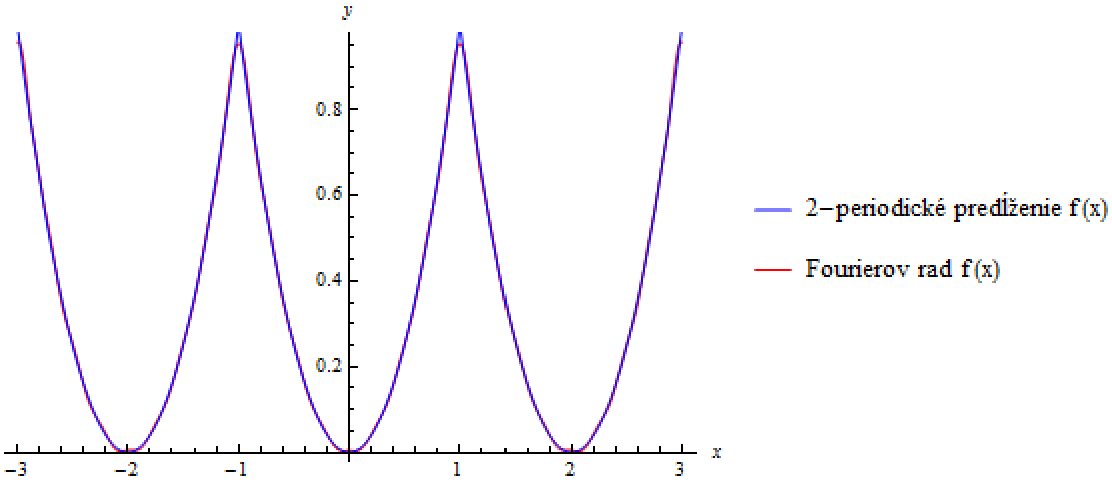
$$x^2 \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x \qquad na \; (-1, 1).$$

Fourierov rad funkcie $f(x) = x^2$ s 5 členmi aproximuje funkciu nasledovne



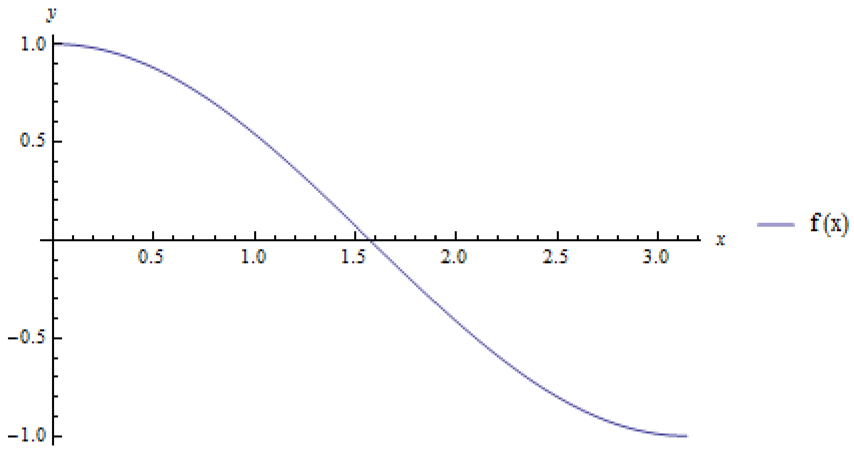
Obrázok 36: Fourierov rad $f(x) = x^2$ s $n = 5$

Fourierov rad funkcie $f(x) = x^2$ s 25 členmi aproximuje funkciu nasledovne



Obrázok 37: Fourierov rad $f(x) = x^2$ s $n = 25$

Príklad 23. Určite Fourierov rad funkcie $f(x) = cos\, x$ intervale $(0, \pi)$. Načrtnite jej periodické predĺženie vrátane aproximácie získanej pomocou Fourierovho radu.



Obrázok 38: Funkcia $f(x) = cos\, x$ na $(0, \pi)$

Riešenie. Pretože sa jedná o nepárnu funkciu na danom intervale, platí

$$a_n = 0, \;\; pre\, n \in N.$$

Koeficienty b_n vypočítame pomocou vzťahu

$$sin\, \alpha x\, cos\, \beta x = \frac{1}{2}[sin(\alpha - \beta)x + sin(\alpha + \beta)x].$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} cos\,x\,sin\,nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[sin(n-1)x + sin(n+1)x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{cos(n-1)x}{(n-1)}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{cos(n+1)x}{(n+1)}\right]_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{cos(n-1)\pi - 1}{(n-1)} - \frac{cos(n+1)\pi - 1}{(n+1)}\right] =$$

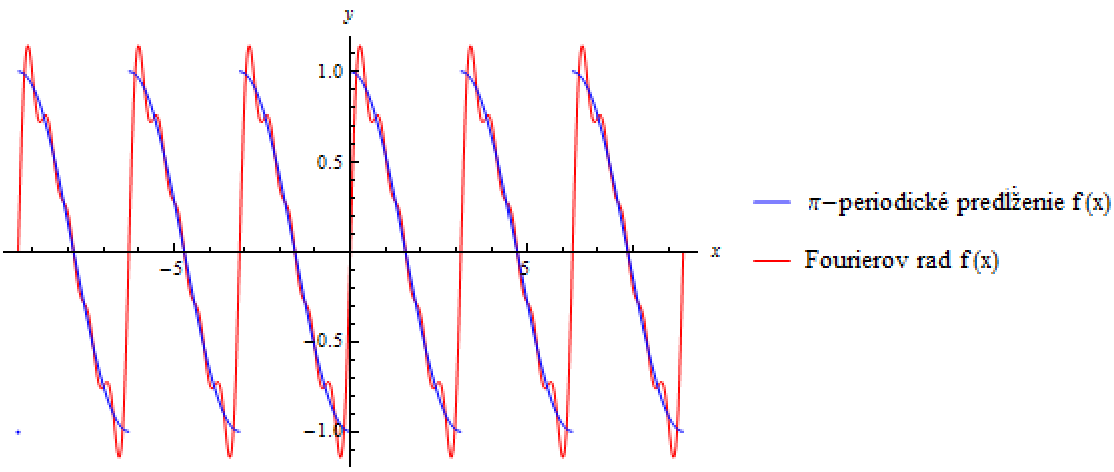
$$= \left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n+1}{(n-1)} + \frac{(-1)^n+1}{(n+1)}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\left\{[(-1)^n+1]\frac{n+1+n-1}{n^2-1}\right\} =$$

$$= \frac{2n[(-1)^n+1]}{\pi(n^2-1)} \quad pre\ n = 1, 2, \ldots$$

Funkcii $f(x) = \cos x$ priradíme sínusový rad

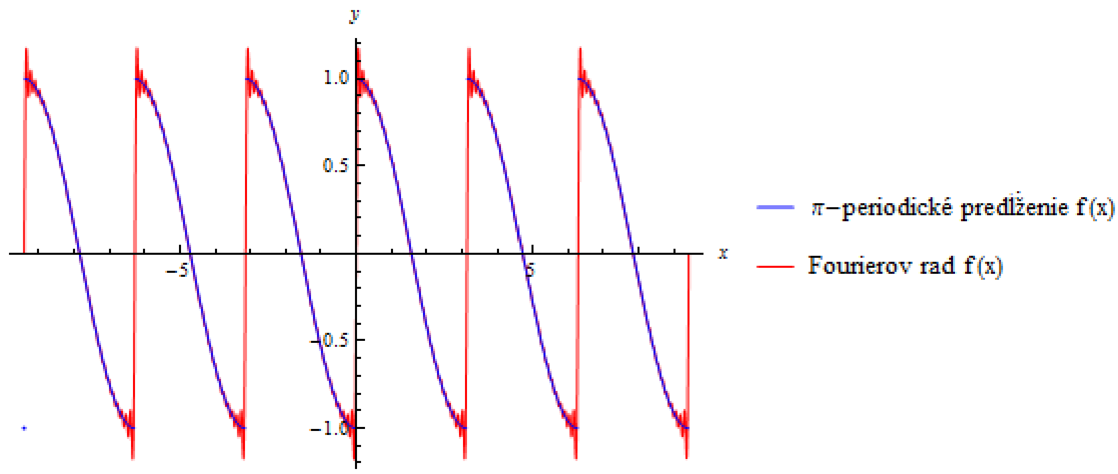
$$cos\,x \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n[(-1)^n+1]}{n^2-1} sin\,nx \qquad na\ (0, \pi).$$

Fourierov rad funkcie $f(x) = cos\,x$ s 10 členmi aproximuje funkciu nasledovne



Obrázok 39: Fourierov rad $f(x) = cos\,x$ s $n = 10$

Fourierov rad funkcie $f(x) = cos\, x$ s 50 členmi aproximuje funkciu nasledovne



Obrázok 40: Fourierov rad $f(x) = cos\, x$ s $n = 50$

ZÁVER

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo vypracovať rešerš teoretických znalostí z oblasti nekonečných funkčných radov, so zameraním na Fourierove trigonometrické rady a aproximáciu funkcií pomocou nich. Teoretická časť bola rozdelená na dve kapitoly. V prvej kapitole boli uvedené základné definície a vety platiace pre funkčné, mocninné a trigonometrické rady. Z týchto boli širšie popísané rady Fourierove. Druhá kapitola sa zaoberala aproximáciou funkcií pomocou polynómov za použitia rôznych metód. V praktickej časti sme aplikovali uvedenú teóriu na niekoľko príkladov, na ktorých sme ukázali aproximáciu trigonometrickými polynómami a niektoré vlastnosti Fourierových radov. Pre zobrazenie jednotlivých grafov sme použili príkazy softvéru Mathematica. Využitie Fourierových radov v praxi nájdeme v matematike alebo fyzike, napríklad pri popise trignonometrických systémov, periodických signálov, či zvuku. Výsledkom bakalárskej práce je matematický text popisujúci aproximáciu funkcií hlavne Fourierovými trignonometrickými polynómami doplnený o výpočet praktických príkladov.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1] ŠKRÁŠEK, Josef. *Základy aplikované matematiky II*. 1. vyd. Praha, 1986, 896 s.

[2] ČERNÝ, Ilja. *Úvod do inteligentního kalkulu 2: 1000 příkladů z pokročilejší analýzy*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2005, 329 s. ISBN 80-200-1314-8.

[3] HOLENDA, Jiří. *Řady: celost. vysokošk. příručka pro skupinu techn. stud. oborů*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1990, 204 s. Matematika pro vysoké školy technické. ISBN 80-030-0505-1.

[4] KVASNICA, Jozef. *Matematický aparát fyziky*. 2. upr. vyd. Praha: Academia, c1997, 383 s. ISBN 80-200-0603-6.

[5] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. 6. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 1995, 874 s. ISBN 8085849623.

[6] HERRMANN, Leopold. Fourierovy řady: komentované přednášky [online]. Vyd. 1. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002, 79 s. ISBN 80-010-2603-5. Dostupné

z: http://www.strojar.com/upload/skripta/2rocnik/M3_Fourierovy_rady.pdf

[7] APROXIMACE FUNKCÍ. In: Centrum aplikované matematiky [online]. Dostupné

z: http://www.cam.zcu.cz/~danek/Students/2003_ZS/Materialy/aproximace_funkci.pdf

[8] The Mathematica Book, manuál pre softvér Mathematica.

[9] BRAUN, Martin. Differential equations and their applications: an introduction to applied mathematics. 4th ed. New York: Springer-Verlag, 1992, 578 s. ISBN 978-0-387-97894-9.

[10] Non-sinusoidal waveform. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-2012. Dostupné z:http://en.wikipedia.org/wiki/Non-sinusoidal_waveform

[11] DOŠLÁ, Zuzana, Roman PLCH a Petr SOJKA. Nekonečné řady s programem Maple [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2002. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~plch/nkpm/

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK

$P(2\pi)$ Množina 2π-periodických funkcií

Z Množina celých čísel

N Množina prirodzených čísel

R Množina reálnych čísel

$f(x-)$ Limita funkcie zľava v bode x

$f(x+)$ Limita funkcie sprava v bode x

R_+ Množina kladných reálnyc čísel

C Množina komplexných čísel

ZOZNAM OBRÁZKOV