

Polynomiální metoda návrhu řízení jednorozměrných systémů

Jiří Oškera

Bakalářská práce
2014



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: Jiří OŠKERA
Osobní číslo: A10145
Studijní program: B3902 Inženýrská informatika
Studijní obor: Informační a řídicí technologie
Forma studia: prezenční

Téma práce: Polynomiální metoda návrhu řízení jednorozměrných systémů

Zásady pro vypracování:

1. Prostudujte a popište polynomiální metodu pro návrh regulátorů v lineárních spojitých SISO systémech řízení.
2. Pomocí polynomiální metody navrhnete spojitě regulátory pro různé konfigurace systému řízení a vhodně zvolené regulované soustavy.
3. Provedte simulaci řízení vytvořených regulačních obvodů v prostředí Matlab/Simulink.
4. Výsledné regulační pochody porovnejte a následně vyhodnoťte.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. KUČERA, Vladimír. Diophantine equations in control – A survey. Automatica. 1993, Vol. 29, No. 6, 1361-1375. ISSN 0005-1098. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000510989390003C>.
2. DOSTÁL, Petr a Radek MATUŠŮ. Stavová a algebraická teorie řízení [online]. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2010 [cit. 2014-02-02]. ISBN 978-80-7318-991-4. Dostupné z: <http://dspace.k.utb.cz/handle/10563/18580>.
3. PROKOP, Roman, Radek MATUŠŮ a Zdenka PROKOPOVÁ. Teorie automatického řízení – lineární spojité dynamické systémy. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2006. ISBN 80-7318-369-2.
4. BALÁTĚ, Jaroslav. Automatické řízení. Praha: BEN – technická literatura, 2003. ISBN 80-7300-020-2.
5. ŠULC, Bohumil a Miluše VÍTEČKOVÁ. Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů. Praha: ČVUT, 2004. ISBN 80-01-03007-5.
6. NAVRÁTIL, Pavel. Automatizace: Vybrané statě [online]. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2011 [cit. 2014-02-02]. ISBN 978-80-7318-935-8. Dostupné z: <http://dspace.k.utb.cz/handle/10563/18581>.

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. Radek Matušů, Ph.D.

Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání bakalářské práce:

28. února 2014

Termín odevzdání bakalářské práce:

13. června 2014

Ve Zlíně dne 28. února 2014

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- Že odevzdaná verze diplomové/bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá návrhem řízení. K tomuto účelu je využita polynomiální metoda. Struktura a parametry hledaného regulátoru jsou získány řešením polynomiálních rovnic. Návrh regulátoru je realizován v konfiguraci 1DOF a 2DOF. Regulované soustavy jsou zvoleny jako lineární spojité jednorozměrné systémy. Výsledné regulační obvody jsou simulovány v programu Matlab/Simulink.

Klíčová slova: Návrh řízení, polynomiální metoda, konfigurace 1DOF, konfigurace 2DOF, regulátor, regulovaná soustava, regulační obvod.

ABSTRACT

This bachelor thesis deals with design of control. The polynomial method is used for this purpose. Structure and parameters of demanded controller are obtained by solving the polynomial equations. Design of controller is realized in 1DOF configuration and 2DOF configuration. Controlled systems are selected as linear continuous-time SISO systems. The resulting control loops are simulated by Matlab/Simulink.

Keywords: Control design, polynomial method, 1DOF configuration, 2DOF configuration, controller, controlled system, control loop.

Tímto bych chtěl poděkovat panu Ing. Matušů, Ph.D za odborné rady a připomínky během tvorby této práce.

OBSAH

ÚVOD	9
I TEORETICKÁ ČÁST	10
1 ZÁKLADNÍ POJMY	11
1.1 SYSTÉM.....	11
1.1.1 Matematická definice systému.....	11
1.2 ŘÍZENÍ.....	11
1.2.1 Klasifikace řízení	11
1.3 ZÁKLADNÍ REGULAČNÍ OBVOD.....	12
1.3.1 Klasifikace regulačních obvodů.....	12
2 POPIS LINEÁRNÍHO SPOJITÉHO SYSTÉMU	14
2.1 VNĚJŠÍ POPIS SYSTÉMU.....	14
2.2 VNITŘNÍ POPIS SYSTÉMU	15
3 SYNTÉZA REGULAČNÍHO OBVODU	16
3.1 STANDARDNÍ METODY NÁVRHU ŘÍZENÍ.....	16
3.2 POLYNOMIÁLNÍ METODA NÁVRHU ŘÍZENÍ	17
3.2.1 Konfigurace s jedním stupněm volnosti (1DOF).....	17
3.2.2 Konfigurace se dvěma stupni volnosti (2DOF)	21
3.2.3 Volba charakteristického polynomu $d(s)$	25
3.3 VYHODNOCOVÁNÍ KVALITY REGULAČNÍHO PROCESU	26
3.3.1 Integrované kritérium kvadratické regulační plochy.....	26
II PRAKTICKÁ ČÁST	27
4 NÁVRH ŘÍZENÍ PRO RŮZNÉ REGULOVANÉ SOUSTAVY	28
4.1 REGULOVANÁ SOUSTAVA 1	29
4.1.1 Konfigurace 1DOF.....	29
4.1.2 Simulace 1DOF konfigurace.....	30
4.1.3 Konfigurace 2DOF.....	32
4.1.4 Simulace 2DOF konfigurace.....	34
4.1.5 Porovnání 1DOF konfigurace s 2DOF konfigurací	37
4.2 REGULOVANÁ SOUSTAVA 2.....	38
4.2.1 Konfigurace 1DOF.....	38
4.2.2 Simulace 1DOF konfigurace.....	39
4.2.3 Konfigurace 2DOF.....	40
4.2.4 Simulace 2DOF konfigurace.....	42
4.2.5 Porovnání 1DOF konfigurace s 2DOF konfigurací	43
4.3 REGULOVANÁ SOUSTAVA 3.....	44
4.3.1 Konfigurace 1DOF.....	44
4.3.2 Simulace 1DOF konfigurace.....	46
4.3.3 Konfigurace 2DOF.....	47
4.3.4 Simulace 2DOF konfigurace.....	48
4.3.5 Porovnání 1DOF konfigurace s 2DOF konfigurací	49
4.4 REGULOVANÁ SOUSTAVA 4.....	50
4.4.1 Konfigurace 1DOF.....	50

4.4.2	Simulace 1DOF konfigurace.....	52
4.4.3	Konfigurace 2DOF.....	53
4.4.4	Simulace 2DOF konfigurace.....	55
4.4.5	Porovnání 1DOF konfigurace s 2DOF konfigurací	56
ZÁVĚR		58
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....		59
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....		60
SEZNAM OBRÁZKŮ		62
SEZNAM TABULEK.....		64
SEZNAM PŘÍLOH.....		65

ÚVOD

Lidé, už od pradávna, jsou stvořeni zvědavá. Každý člověk přemýšlí, jak svou každodenní činnost co nejvíce zjednodušit, ať už jde o běžné činnosti nebo práci. V dnešním přetechinovaném světě tomu není jinak. Díky rozvoji automatizace vznikají továrny, kde je lidský faktor, při výrobní procesu, značně minimalizován. To nevede jen k zjednodušení lidské práce, ale také k minimalizaci chyb a zkvalitnění výroby. To však nejsou jediné výhody automatizovaného výrobního procesu, díky tomu lze také zavést přesné normy pro kvalitu i kvantitu výrobků. Základní činností takové výroby je dosáhnout určitého cíle a udržet ho po danou dobu i během působení vnějších nežádoucích jevů. Jedná se tedy o regulaci.

Tato práce se zabývá návrhem řízení pomocí polynomiální metody. Na rozdíl od konvenčních metod, kde je řízení obvykle realizováno regulátorem s P-I-D složkami a tedy je struktura regulátoru pevně určena, u polynomiální metody je struktura regulátoru vypočtena podle regulované soustavy a vstupních veličin. Tato metoda vychází z algebraické teorie. Jednotlivé prvky regulačního obvodu jsou vyjádřeny podílem polynomů. Struktura a parametry hledaného regulátoru jsou získány řešením polynomiálních rovnic. Levá strana těchto rovnic je tvořena z polynomů regulačního obvodu a pravá strana je dána stabilním polynomem.

V této práci je polynomiální metoda využita pro návrh regulátorů v konfiguraci 1DOF a v konfiguraci 2DOF. Jako objekty regulace jsou zvoleny různé lineární spojité SISO (*Single-Input Single-Output*) systémy. Všechny regulované soustavy jsou zvoleny jako nekmitavé a poruchová veličina je ve formě skoku. První soustava je stabilní prvního řádu s minimální fází. Druhá soustava je zvolena jako stabilní druhého řádu s neminimální fází a třetí regulovaná soustava je nestabilní druhého řádu. U těchto regulovaných soustav je žádaná hodnota dána funkcí skoku. Poslední regulovaná soustava je zvolena jako stabilní prvního řádu s minimální fází, ale jako žádaná hodnota je vybrána harmonická funkce sinus. Pro každou z těchto soustav jsou vypočítány různě laděné regulátory, jejichž činnost je simulována v prostředí Matlab/Simulink. Takto získané regulační pochody jsou porovnány a následně zhodnoceny.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 ZÁKLADNÍ POJMY

1.1 Systém

Systém je jeden z nejzákladnějších pojmů, se kterým se hojně setkáváme v oblasti automatizace a teorii řízení. Je tvořen množinou prvků, mezi kterými jsou vzájemné vazby. Systém jako celek je dále ovlivňován i prostředím ve kterém působí. Vyznačuje se dvěma základními vlastnostmi, konkrétně chováním a strukturou systému. Chování systému je vyjádřeno vazbou mezi vnějším působením na jeho vstup a jeho odpovídající odezvou na výstupu. Struktura systému je dána vzájemnými vazbami mezi vnitřními prvky systému a jejich chováním. [1]

1.1.1 Matematická definice systému

$$S = \{A, W, K, Q\} \quad (1)$$

- S – množina reprezentující celkový systém
- A – množina prvků systému
- W – množina vstupních veličin
- K – množina výstupních veličin
- Q – množina vyjadřující vazby mezi vstupními a výstupními veličinami [1]

1.2 Řízení

Účelem automatizace je částečně nebo úplně nahradit lidský faktor ve výrobním procesu. Lidská činnost je nahrazena činností strojů a různých zařízení. [2]

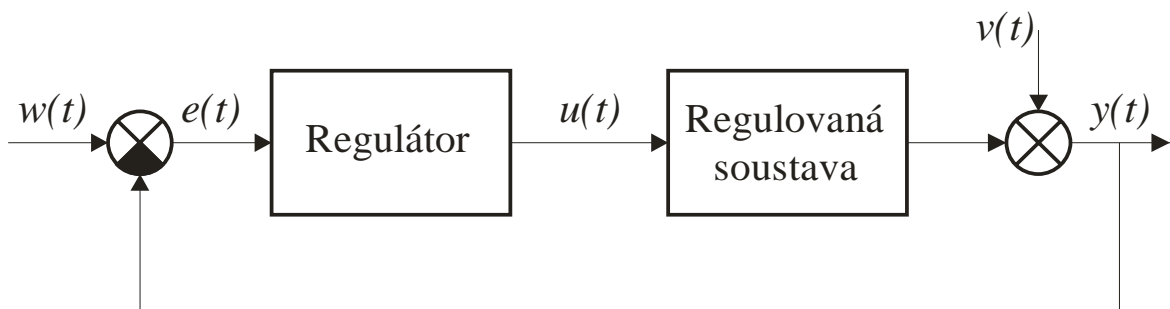
Základním prvkem automatizace je řízení. Řízením rozumíme úmyslné působení na řízený systém tak, aby bylo dosaženo předem definovaného výsledku. Věda, která se zabývá touto problematikou, se nazývá Kybernetika. [2]

1.2.1 Klasifikace řízení

Řízení se dělí podle způsobu provedení na automatické a ruční. Řízení lze také rozdělit podle přívodu energie na přímé a nepřímé. U přímého řízení je proces řízení uskutečněn bez dodatečného přívodu energie a u nepřímého je nutno dodat navíc vnější zdroj energie. Podle použitých signálů lze řízení také rozdělit na logické, spojitě a diskrétní. Řízení lze dále rozdělit na ovládání, regulaci a vyšší formy řízení. Řízení bez zpětné vazby mezi výstupem a vstupem je ovládání. Regulace je forma řízení, při které je výsledek zpětně kont-

rolován pomocí zpětné vazby. Tedy je snaha udržet výslednou veličinu na požadované hodnotě. Mezi neznámější vyšší formy řízení patří optimální a adaptivní řízení. Při optimálním řízení dosáhne systém požadovaného cíle za co nejkratší dobu nebo jej dosáhne při vynaložení minimálního množství energie. Adaptivní řízení je taková forma řízení, která umožňuje systému samočinně měnit své parametry tak, aby řídicí proces probíhal stále optimálně. [2]

1.3 Základní regulační obvod



Obr. 1. Blokové schéma základního spojitého regulačního obvodu

- $w(t)$ – žádaná veličina
- $e(t)$ – regulační odchylka
- $u(t)$ – akční veličina
- $v(t)$ – poruchová veličina
- $y(t)$ – regulovaná veličina

Regulační obvod je tvořen dvěma bloky a to regulátorem a regulovanou soustavou. Žádaná veličina udává požadovanou hodnotu, kterou má dosáhnout a udržet regulovaná veličina na výstupu regulačního obvodu. To je zajištěno pomocí záporné zpětné vazby, která přivádí hodnotu regulované veličiny na vstup obvodu. Poté je hodnota regulované a žádané veličiny porovnána a jejich rozdíl udává regulační odchylku. Z toho plyne, že je žádoucí, aby tento rozdíl byl co nejmenší. Regulátor, na základě regulační odchylky, generuje akční veličinu, jejímž prostřednictvím působí na regulovanou soustavu a tím vyvolá korekci regulované hodnoty. Na regulační obvod působí také poruchy, které mají nežádoucí vliv na regulovanou soustavu a tím způsobují změny regulované hodnoty. [2]

1.3.1 Klasifikace regulačních obvodů

Regulační obvody se dělí podle počtu smyček, které jsou tvořeny regulátorem a regulovanou soustavou, na jednoduché a rozvětvené. Jednoduché regulační obvody jsou tvořeny

pouze jednou smyčkou. Tyto obvody jsou však v některých případech nedostačující a v takovém případě se pro zlepšení regulace využívají rozvětvené regulační obvody. U rozvětvených obvodů jsou zavedeny další smyčky přidáním pomocných veličin. Mezi tyto veličiny patří pomocná regulovaná veličina, pomocná akční veličina a měřené poruchové veličiny. Podle toho, zda je objektem regulace jednorozměrný nebo mnohorozměrný systém, jsou regulační obvody děleny na jednorozměrné a mnohorozměrné. [2]

2 POPIS LINEÁRNÍHO SPOJITÉHO SYSTÉMU

2.1 Vnější popis systému

Vlastnosti systému jsou získány pomocí relace mezi vstupem a výstupem systému. Mezi způsoby vnějšího popisu patří:

- lineární diferenciální rovnice
- obrazový přenos systému získaný využitím Laplaceovy transformace
- přechodová charakteristika
- impulsní charakteristika
- frekvenční charakteristika [3]

V tomto textu se bude dále pracovat převážně s popisem systému ve formě obrazového přenosu $G(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2)$$

- $G(s)$ – přenos systému v komplexní rovině s
- $Y(s)$ – výstup systému v komplexní rovině s
- $U(s)$ – vstup systému v komplexní rovině s

Obrazový přenos poskytuje základní informace o vlastnostech systému. Nejdůležitější z nich je stabilita systému. Informace o stabilitě systémů udává jmenovatel přenosu, který je též nazýván jako charakteristický polynom. Pomocí kořenů charakteristického polynomu lze určit, zda se jedná o systém stabilní nebo nestabilní. Tyto kořeny jsou póly systému. Pokud jsou všechny póly umístěné v záporné oblasti komplexní roviny, jedná se o systém stabilní. Poloha pólů také určuje, zda se jedná o systém aperiodický (nekmitavý) nebo periodický (kmitavý). V případě, že póly charakteristického polynomu mají imaginární složku nulovou, je regulační obvod nekmitavý. V případě komplexně sdružených pólů se jedná o regulační obvod kmitavý. Kořeny čitatele se nazývají nuly systému a jejich poloha udává fázovost systému. Řád charakteristického polynomu je roven řádu celkového systému a relativní řád je rozdíl mezi stupni jmenovatele a čitatele. Porovnání stupňů jmenovatele a čitatele udává také ryzost (fyzikální realizovatelnost) systému. [2]

2.2 Vnitřní popis systému

Vnitřní popis systému neboli stavový popis využívá kromě vstupních a výstupních veličin také stavové veličiny. Stavový popis využívá dvou typů relací, které jsou dány jako relace mezi vstupem a stavem a relace mezi stavem a výstupem. [3]

Vnitřní popis systému nebude v této práci využit, a proto je zbytečné ho dále rozebírat. Podrobnější informace o stavovém popisu lze nalézt například v publikaci Automatické řízení [1] od Jaroslava Balátě.

3 SYNTÉZA REGULAČNÍHO OBVODU

Syntéza je činnost, která se zabývá volbou vhodného regulátoru. Při návrhu regulátoru je postupováno tak aby byly splněny základní vlastnosti regulačního obvodu, které jsou definovány následovně:

- Stabilita obvodu
- Vnitřní ryzost systému (veškeré přenosové funkce v obvodu by měly být ryzí)
- Asymptotické sledování žádané hodnoty
- Kompenzace poruch [4]

3.1 Standardní metody návrhu řízení

Při těchto metodách řízení se nejdříve zvolí typ regulátoru a poté se nastaví jeho konstanty. Jedná se tedy o regulátory s pevně danou strukturou. Do této skupiny patří regulátory se složkami P-I-D (Proporcionální-Integrační-Derivační), které jsou v praxi hojně využívány. Pro správnou funkčnost těchto regulátorů je zapotřebí korektně nastavit jeho parametry. Nastavení těchto parametrů je řešeno pomocí řady metod, které se vzájemně liší. [5]

Typy regulátorů se složkami P-I-D:

- **P-regulátor** se využívá se v nenáročných situacích a pracuje s trvalou regulační odchylkou.
- **I-regulátor** se využívá ve statických soustavách s malou časovou konstantou, pracuje bez trvalé regulační odchylky. Tento regulátor není vhodný pro astatické soustavy.
- **PI-regulátor** se používá ve středně náročných situacích. Nezanechává regulační odchylku a na rozdíl od předchozího vylepšuje stabilitu obvodu a dá se využít i pro astatické soustavy.
- **PD-regulátor** se používá v soustavách s velkým dopravním zpožděním a ponechává trvalou regulační odchylku. Přidáním derivační složky je dosaženo vyšší stability než u P-regulátoru. Tento regulátor patří mezi méně využívané.
- **PID-regulátor** se používá pro náročné situace a pracuje bez trvalé regulační odchylky. Derivační složka umožnila zvýšení stability obvodu. Dokáže lépe reagovat na rychlé děje než PI-regulátor. [5]

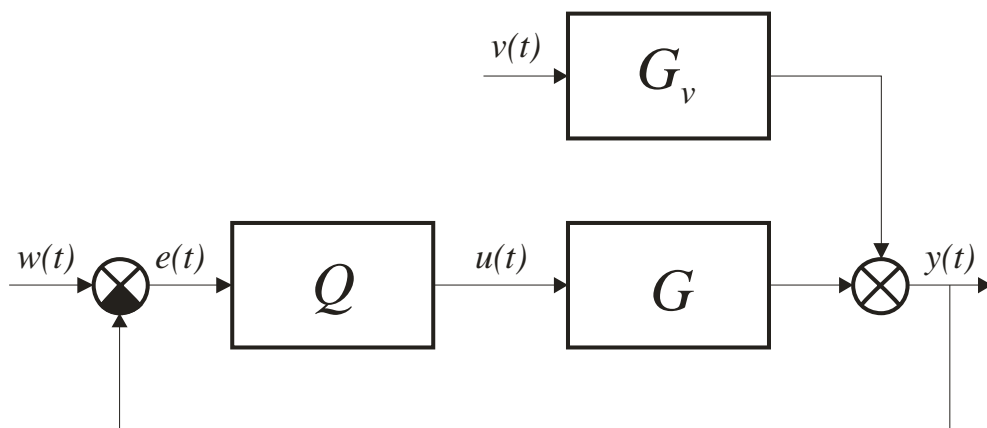
3.2 Polynomiální metoda návrhu řízení

Kromě výše zmíněných standardních metod syntézy se využívají i nekonvenční metody, které jsou založeny na algebraické teorii. Mezi tyto metody syntézy regulačních obvodů patří také velmi rozšířená polynomiální metoda návrhu řízení. [4]

Polynomiální metoda návrhu řízení využívá relací mezi vstupem a výstupem lineárního řízeného systému. Přenosy prvků lineárního regulačního obvodu jsou vyjádřeny jako podíly dvou polynomů, jedná se tedy o racionální lomené funkce. V případě mnohorozměrových systémů jsou polynomy nahrazeny polynomiálními maticemi. Získání korektního regulátoru, k danému řízenému systému, je dosaženo řešením polynomiálních rovnic. [6]

Oproti standardním metodám návrhu řízení, kde volíme typ a parametry regulátoru, tato metoda udává strukturu regulátoru i vztahy pro výpočet jeho parametrů. Tyto vztahy pro výpočet parametrů jsou snadno programovatelné, a proto je polynomiální metoda vhodná i pro adaptivní řízení. Polynomiální metoda se dá využít k návrhu regulátorů pro systémy stabilní, nestabilní, s neminimální fází a s integračním charakterem. Referenční signály (signály žádaných veličin) nemusí být pouze ve formě skokové změny, díky tomu můžeme získat regulátory s nezvyklou strukturou. [6]

3.2.1 Konfigurace s jedním stupněm volnosti (1DOF)



Obr. 2. Blokové schéma konfigurace 1DOF

Zkratka a název této konfigurace vychází z anglického označení *One Degree of Freedom*. Ze schématu (Obr. 2) vyplývá, že regulační obvod je tvořen zpětnovazebním regulátorem Q , regulovanou soustavou, která je vyjádřena přenosy G a G_v . Signály působící v obvodu jsou shodné se signály v základním regulačním obvodu (Obr. 1). [6]

Obrazový přenos akční veličiny v regulované soustavě je označen jako $G(s)$ a je vyjádřen podílem polynomů b a a ve tvaru:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (3)$$

Přenos poruchové veličiny v regulované soustavě je označen jako $G_v(s)$ a je vyjádřen podílem polynomů c a a ve tvaru:

$$G_v = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{c(s)}{a(s)} \quad (4)$$

Přičemž je předpokládáno, že polynomy b , a a c , a jsou nesoudělné. Ryzost přenosů (3) a (4) je zajištěna podmínkami:

$$\deg a(s) \geq \deg b(s), \deg a(s) \geq \deg c(s) \quad (5)$$

Přenos zpětnovazebního regulátoru je vyjádřen podílem nesoudělných polynomů q a p ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{U(s)}{W(s)} = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (6)$$

Ryzost regulátoru Q je zajištěna podmínkou:

$$\deg p(s) \geq \deg q(s) \quad (7)$$

Obrazy vstupních signálů, žádané veličiny $W(s)$ a poruchové veličiny $V(s)$, jsou také chápány jako podíly polynomů:

$$W(s) = \frac{h_w(s)}{f_w(s)}, V(s) = \frac{h_v(s)}{f_v(s)} \quad (8)$$

Obrazy zbývajících signálů (akční veličiny $U(s)$, regulované veličiny $Y(s)$ a regulační odchylky $E(s)$) jsou dány vztahy, které vychází ze schématu konfigurace (Obr. 2). Pro tyto obrazy platí:

$$Y(s) = G(s)U(s) + G_v(s)V(s) = \frac{b(s)}{a(s)}U(s) + \frac{c(s)}{a(s)}V(s) \quad (9)$$

$$E(s) = W(s) - Y(s) \quad (10)$$

$$U(s) = Q(s)E(s) = \frac{q(s)}{p(s)}E(s) = \frac{q(s)}{p(s)}[W(s) - Y(s)] \quad (11)$$

Z důvodu přehlednosti je v následujících vztazích argument s ponechán pouze u obrazů signálů.

Úprava rovnice regulované veličiny (9) dosazením rovnice akční veličiny (11):

$$Y(s) = \frac{bq}{ap} [W(s) - Y(s)] + \frac{c}{a} V(s)$$

$$\left(\frac{ap + bq}{ap}\right) Y(s) = \frac{bq}{ap} W(s) + \frac{c}{a} V(s)$$

$$Y(s) = \frac{bq}{ap + bq} W(s) + \frac{cp}{ap + bq} V(s) \quad (12)$$

Úprava rovnice regulační odchylky dosazením rovnice (12):

$$E(s) = W(s) - \frac{bq}{ap + bq} W(s) - \frac{cp}{ap + bq} V(s)$$

$$E(s) = \frac{ap}{ap + bq} W(s) - \frac{cp}{ap + bq} V(s) \quad (13)$$

Úprava rovnice akční veličiny dosazením rovnice (13):

$$U(s) = \frac{q}{p} \left[\frac{ap}{ap + bq} W(s) - \frac{cp}{ap + bq} V(s) \right]$$

$$U(s) = \frac{aq}{ap + bq} W(s) - \frac{cq}{ap + bq} V(s) \quad (14)$$

Zavedením substituce $d = ap + bq$ do rovnic (12), (13) a (14) jsou získány zjednodušené vztahy pro obrazy $Y(s)$, $E(s)$ a $U(s)$ ve formě rovnic:

$$Y(s) = \frac{1}{d} [bqW(s) + cpV(s)] \quad (15)$$

$$E(s) = \frac{p}{d} [aW(s) - cV(s)] \quad (16)$$

$$U(s) = \frac{q}{d} [aW(s) - cV(s)] \quad (17)$$

Z těchto vztahů vyplývá, že substituce d tvoří jmenovatel všech obrazových signálů. Jedná se tedy o charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu. Tento polynom je tvořen známými polynomy a , b obsaženými v přenosu regulované soustavy (3) a neznámými polynomy q , p z přenosu regulátoru (6). Správná volba neznámých polynomů zpětnovazebního regulátoru udává stabilitu regulačního obvodu. Uzavřený regulační obvod je

stabilní, pokud polynomy přenosu zpětnovazebního regulátoru jsou určeny řešením polynomiální rovnice ve tvaru:

$$ap + bq = d \quad (18)$$

Kde d je stabilní polynom. [6]

Pro zajištění asymptotického sledování žádané hodnoty a kompenzace poruch je potřebné aby, regulační odchylka byla nulová, tedy musí být splněna limita:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [e(t)] = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} [sE(s)] = 0 \quad (19)$$

Dosažením vztahů vstupních signálů (8) do rovnice regulační odchylky (16) je dosaženo tvaru:

$$E(s) = \frac{p}{d} \left[a \frac{h_w}{f_w} - c \frac{h_v}{f_v} \right] \quad (20)$$

Z tohoto vzatu vyplývá, že podmínka (19) bude splněna, když polynomy f_w a f_v dělí polynom p . Toho lze docílit zavedením vztahu pro polynom p ve tvaru:

$$p = f\tilde{p} \quad (21)$$

kde polynom f je nejmenší společný násobek obou jmenovatelů vstupních signálů. [6]

Dosažením polynomu p (21) do polynomiální rovnice (18) je získán vztah:

$$af\tilde{p} + bq = d \quad (22)$$

Zajištění ryzosti všech prvků obvodu je zprostředkováno vhodnou volbou stupňů polynomů v polynomiální rovnici (22). Ze vztahů ryzosti (5) a (7) vychází podmínka:

$$\deg(af\tilde{p}) \geq \deg bq \quad (23)$$

Stupeň polynomu d je roven vyššímu stupni ze vztahu (23) a tedy platí:

$$\deg d = \deg a + \deg f + \deg \tilde{p} \quad (24)$$

Celkový počet neznámých PN levé strany rovnice (22) je dán vztahem:

$$PN = \deg \tilde{p} + \deg q + 2 \quad (25)$$

Pro počet rovnic PR platí:

$$PR = \deg d + 1 = \deg a + \deg f + \deg \tilde{p} + 1 \quad (26)$$

Porovnáním $PN = PR$ a využitím nerovnosti (7) jsou po úpravách získány vztahy:

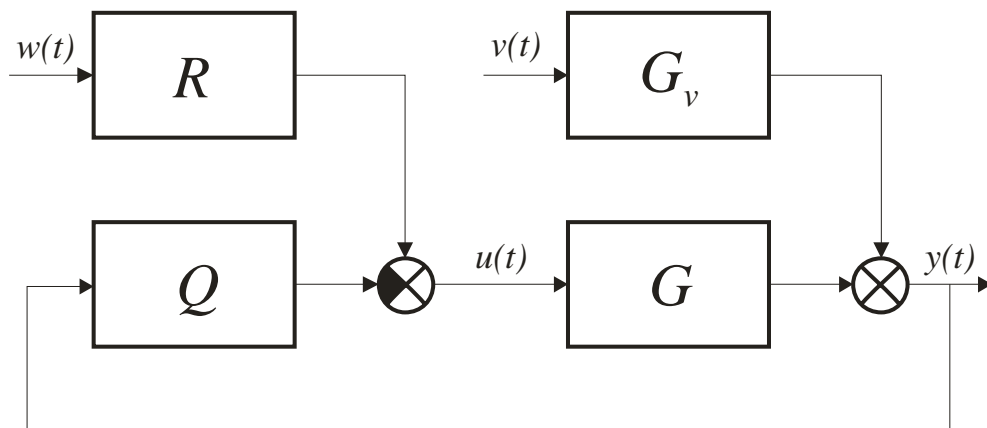
$$\deg q = \deg a + \deg f - 1 \quad (27)$$

$$\deg \tilde{p} \geq \deg a - 1 \quad (28)$$

$$\deg d \geq 2 \deg a + \deg f - 1 \quad (29)$$

Neznámé parametry zpětnovazebního regulátoru jsou nalezeny vyřešením polynomiální rovnice (22) při dodržení podmínek (27), (28) a (29) pro volbu stupňů polynomů. Polynom d na pravé straně rovnice je volen pomocí různých metod, některé z nich jsou uvedeny později. [6]

3.2.2 Konfigurace se dvěma stupni volnosti (2DOF)



Obr. 3. Blokové schéma konfigurace 2DOF

Název této konfigurace je odvozen od anglického označení *Two Degrees of Freedom*. Na rozdíl od konfigurace 1DOF (Obr. 2), kde je obsažen pouze zpětnovazební regulátor Q , je zde regulátor rozdělen na část přímovazební R a část zpětnovazební Q . Na vstup přímovazební části regulátoru je přiveden signál žádané veličiny. [6]

Přenosy $G(s)$ a $G_v(s)$ pro regulovanou soustavu jsou totožné s přenosy (3) a (4) v konfiguraci 1DOF a platí pro ně i stejné podmínky ryzosti.

Přenos přímovazební části regulátoru $R(s)$ je vyjádřen podílem nesoudělných polynomů r , p a je ve tvaru:

$$R(s) = \frac{r(s)}{p(s)} \quad (30)$$

Ryzost přenosu $R(s)$ je dána podmínkou:

$$\deg p(s) \geq \deg r(s) \quad (31)$$

Přenos zpětnovazební části regulátoru $Q(s)$ je vyjádřen podílem nesoudělných polynomů q , p ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (32)$$

Ryzost přenosu $Q(s)$ je zaručena podmínkou:

$$\deg p(s) \geq \deg q(s) \quad (33)$$

Vztahy pro obrazy signálů $Y(s)$, $E(s)$ a $U(s)$ vycházejí ze schématu 2DOF (Obr. 3) a tedy pro ně platí:

$$Y(s) = G(s)U(s) + G_v(s)V(s) = \frac{b(s)}{a(s)}U(s) + \frac{c(s)}{a(s)}V(s) \quad (34)$$

$$E(s) = W(s) - Y(s) \quad (35)$$

$$U(s) = R(s)W(s) - Q(s)Y(s) = \frac{r(s)}{p(s)}W(s) - \frac{q(s)}{p(s)}Y(s) \quad (36)$$

V následujících vztazích bude opět argument s ponechán pouze u obrazů signálových veličin.

Úprava rovnice regulované veličiny dosazením rovnice (36):

$$Y(s) = \frac{b}{a} \left[\frac{r}{p} W(s) - \frac{q}{p} Y(s) \right] + \frac{c}{a} V(s)$$

$$\frac{ap + bq}{ap} Y(s) = \frac{br}{ap} W(s) + \frac{c}{a} V(s)$$

$$Y(s) = \frac{br}{ap + bq} W(s) + \frac{pc}{ap + bq} V(s) \quad (37)$$

Úprava rovnice regulační odchylky dosazením rovnice (37):

$$E(s) = W(s) - \frac{br}{ap + bq} W(s) - \frac{pc}{ap + bq} V(s)$$

$$E(s) = \frac{ap + bq - br}{ap + bq} W(s) - \frac{pc}{ap + bq} V(s) \quad (38)$$

Úprava rovnice akční veličiny rovnicí (37):

$$\begin{aligned}
 U(s) &= \frac{r}{p}W(s) - \frac{q}{p} \left[\frac{br}{ap + bq}W(s) + \frac{pc}{ap + bq}V(s) \right] \\
 U(s) &= \frac{r}{p}W(s) - \frac{qbr}{p(ap + bq)}W(s) - \frac{qc}{ap + bq}V(s) \\
 U(s) &= \frac{ar}{ap + bq}W(s) - \frac{qc}{ap + bq}V(s)
 \end{aligned} \tag{39}$$

Po zavedení substituce $d = ap + bq$ do rovnic (37), (38) a (39) jsou získány obrazy:

$$Y(s) = \frac{1}{d} [brW(s) + pcV(s)] \tag{40}$$

$$E(s) = \frac{1}{d} [(d - br)W(s) - pcV(s)] \tag{41}$$

$$U(s) = \frac{1}{d} [arW(s) - qcV(s)] \tag{42}$$

Z těchto vztahů opět vyplývá, že polynom d je opět charakteristickým polynomem uzavřeného regulačního obvodu. Stabilita obvodu je tedy zajištěna řešením polynomiální rovnice (18) se stabilním polynomem na pravé straně, tedy stejně jako u konfigurace 1DOF. [6]

Pro asymptotické sledování žádané veličiny a kompenzaci poruch je třeba zajistit nulovou regulační odchylku, tedy musí platit vztah (19). [6]

Regulační odchylku je třeba opět upravit dosazením vztahů (8), tím je získán vztah:

$$E(s) = \frac{1}{d} \left[(d - br) \frac{h_w}{f_w} - pc \frac{h_v}{f_v} \right] \tag{43}$$

Z obrazu regulační odchylky vyplývá, že asymptotické sledování bude zajištěno, pokud polynom f_w dělí polynom $(d - br)$, tedy platí:

$$d - br = tf_w \tag{44}$$

Kde t je neznámý polynom. [6]

Kompenzace poruch bude zajištěna, pokud polynom f_v dělí polynom p . To je zajištěno vztahem:

$$p = f_v \tilde{p} \tag{45}$$

Dosažením rovnice (45) do charakteristického polynomu (18) je získán vztah:

$$af_v\tilde{p} + bq = d \quad (46)$$

Úpravou rovnice (44) je dosaženo tvaru:

$$tf_w + br = d \quad (47)$$

Ryzost regulačního obvodu je zajištěna správnou volbou stupňů polynomů v rovnicích (46) a (47). [6]

Stupeň polynomu d (polynomiálních rovnic) je dán vztahem:

$$\deg d = \deg(af_v\tilde{p}) = \deg a + \deg f_v + \deg \tilde{p} \quad (48)$$

Celkový počet neznámých $PN1$ levé strany rovnice (46) je roven:

$$PN1 = \deg \tilde{p} + \deg q + 2 \quad (49)$$

Pro počet rovnic $PR1$ platí:

$$PR1 = \deg d + 1 = \deg a + \deg f_v + \deg \tilde{p} + 1 \quad (50)$$

Porovnáním $PN1 = PR1$ a využitím podmínky (33) jsou po jednoduchých úpravách získány vztahy:

$$\deg q = \deg a + \deg f_v - 1 \quad (51)$$

$$\deg \tilde{p} = \deg a - 1 + k \quad (52)$$

$$\deg d = 2 \deg a + \deg f_v - 1 + k \quad (53)$$

Určení stupňů neznámých polynomů v rovnici (47) vychází z podmínky:

$$\deg br \leq \deg d \quad (54)$$

Z rovnice (47) a vztahu (54) je zřejmé, že stupeň polynomu d je roven:

$$\deg d = \deg tf_w = \deg t + \deg f_w \quad (55)$$

Celkový počet neznámých $PN2$ v polynomech t, r na levé straně rovnice (47) je roven:

$$PN2 = \deg t + \deg r + 2 \quad (56)$$

Počet rovnic $PR2$ je dán vztahem:

$$PR2 = \deg d + 1 = \deg t + \deg f_w + 1 \quad (57)$$

Následující vztahy jsou dány porovnáním $PN2 = PR2$, využitím podmínky (31) a následnými úpravami. [6]

$$\deg r = \deg f_w - 1 \quad (58)$$

$$k \geq \deg f_w - \deg f_v - \deg a \quad (59)$$

Pokud pravá strana nerovnice (59) bude záporná nebo nulová, lze číslo k zvolit nulové. V ostatních případech se k vypočítá podle vztahu:

$$k = \deg f_w - \deg f_v - \deg a \quad (60)$$

Stupeň polynomu t v rovnici (47) je určen dosazením rovnice (53) do vztahu (55) a je tedy dán tvarem:

$$\deg t = \deg d - \deg f_w = 2 \deg a + \deg f_v - 1 + k - \deg f_w \quad (61)$$

V této konfiguraci jsou neznámé parametry regulátoru získány vyřešením rovnic (46) a (47). Parametry zpětnovazební části regulátoru získáme řešením rovnice (46) a dodržením podmínek pro volbu stupňů polynomů (51), (52) a (53). Parametry přímovazební části jsou získány řešením rovnice (47) a dodržením podmínek (58), (59), (60) a (61). [6]

3.2.3 Volba charakteristického polynomu $d(s)$

V obou konfiguracích jsou parametry hledaného regulátoru řešením polynomiálních rovnic se stabilním polynomem na pravé straně. Tento polynom je charakteristickým polynomem uzavřeného regulačního obvodu. Jak již bylo zmíněno v kapitole 2.1, volba tohoto polynomu udává stabilitu a kvalitu regulačního obvodu. Tento polynom je ve tvaru

$$d(s) = \prod_{i=1}^{\deg d} (s - x_i), x_i < 0 \quad (62)$$

kde $x_i = \alpha_i + j\beta_i$. Póly x_i uzavřeného regulačního obvodu jsou tvořeny reálnou částí α_i a imaginární částí $j\beta_i$. [6]

Polynomu $d(s)$ může být určen jako vícenásobný reálný pól, tedy platí:

$$d(s) = (s + \alpha)^{\deg d}, \deg \alpha > 0 \quad (63)$$

Tato volba charakteristického polynomu je sice snadno realizovatelná, ale dosažená jakost regulace je často nedostačující. Z tohoto důvodu, se v daných případech volí polynom $d(s)$ tak, aby obsahoval i parametry regulované soustavy. [6]

Pokud je regulovaná soustava stabilní a aperiodická lze polynom $d(s)$ zvolit ve tvaru:

$$d(s) = a(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg a}, \deg \alpha > 0 \quad (64)$$

V případě nestabilní a aperiodické regulované soustavy může být polynom $d(s)$ dán vztahem:

$$d(s) = n(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg a}, \deg \alpha > 0 \quad (65)$$

Polynom $n(s)$ je určen spektrální faktorizací a platí:

$$a^*(s)a(s) = n^*(s)n(s) \quad (66)$$

Kde polynom $n(s)$ je neznámý a je stejného stupně jako polynom $a(s)$. Polynomy $a^*(s)$ a $n^*(s)$ jsou získány z původních polynomů změnou znaménka u jejich prvků s lichými mocninami. [6]

3.3 Vyhodnocování kvality regulačního procesu

Po dokončení návrhu řízení je vhodné výsledný regulátor odzkoušet, zda splňuje požadovanou kvalitu regulace. V simulační části této práce je kvalita regulace posouzena z vizuálního hlediska podle průběhu regulačního pochodu. Aby bylo možné kvalitu regulace i vyčíslit, je využito kritérium kvadratické regulační plochy.

3.3.1 Integrální kritérium kvadratické regulační plochy

Toto kritérium jakosti regulace je dáno vztahem:

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (67)$$

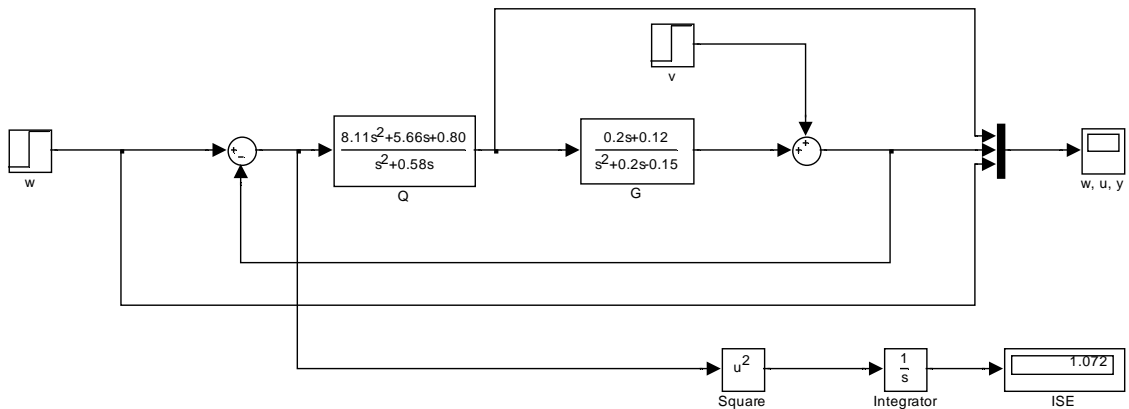
Hodnota *ISE* (*Integral Square Error*) je dána součtem ploch vymezených regulovanou a žádanou veličinou pro celkovou dobu regulačního pochodu. Zásluhou druhé mocniny nedochází k odčítání záporných ploch pod žádanou hodnotou, jedná se tedy o kvadratické plochy. Tato skutečnost umožňuje využití kritéria *ISE* i pro kmitavé regulační pochody. [7]

II. PRAKTICKÁ ČÁST

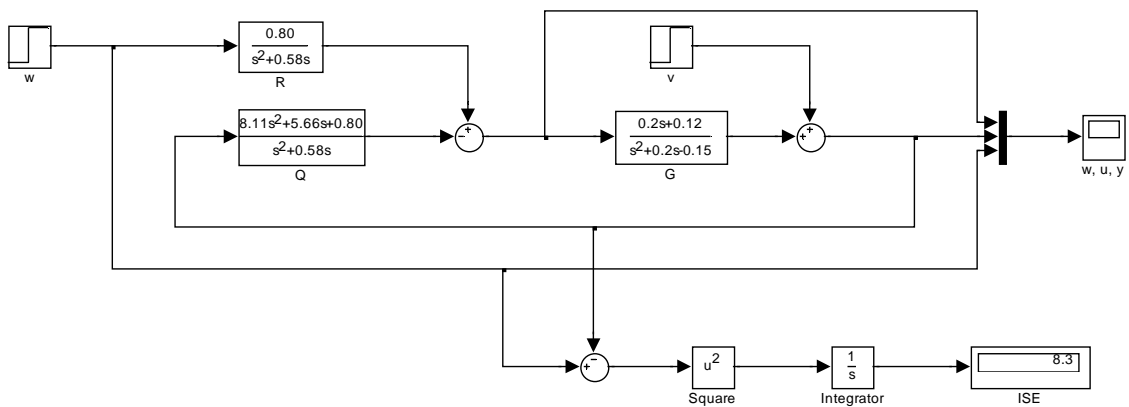
4 NÁVRH ŘÍZENÍ PRO RŮZNÉ REGULOVANÉ SOUSTAVY

V této části práce jsou provedeny návrhy řízení v konfiguracích 1DOF a 2DOF pro vybrané regulované soustavy. Volba charakteristického polynomu $d(s)$ je prováděna podle vztahů (63), (64) a (65). Činnost získaných regulačních obvodů je simulována v prostředí Matlab/Simulink.

Tyto simulace byly provedeny podle následujících zapojení pro konfiguraci 1DOF a konfiguraci 2DOF:



Obr. 4. Simulační zapojení konfigurace 1DOF



Obr. 5. Simulační zapojení konfigurace 2DOF

Pro regulovanou soustavu 4 byl skokový blok w , v v obou konfiguracích, nahrazen blokem funkce sinus.

4.1 Regulovaná soustava 1

Přenos regulované soustavy:

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s}, b_0 = 0.5, a_0 = 0.3, a_1 = 1.2$$

Jedná se o stabilní nekmitavou soustavu prvního řádu s minimální fází.

Vstupní signály jsou dány skokovými funkcemi:

$$w(t) = w_0 1(t), v(t) = v_0 1(t) \Rightarrow W(s) = \frac{w_0}{s}, V(s) = \frac{v_0}{s}$$

kde $v_0 = 0.5$ a žádaná hodnota je na počátku regulace rovna 1 a poté provede skok na hodnotu 2.

4.1.1 Konfigurace 1DOF

Nejmenší společný násobek *LCM (Least Common Multiple)* $f_w(s)$ a $f_v(s)$ je dán:

$$f = LCM [f_w(s), f_v(s)] = s$$

Volba stupňů neznámých polynomů:

$$\deg q = \deg a + \deg f - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$\deg \tilde{p} \geq \deg a - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\deg d \geq 2 \deg a + \deg f - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$$

Přenos zpětnovazebního regulátoru $Q(s)$ bude tedy ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{q}{\widetilde{f p_0}} = \frac{q_0 + q_1 s}{s p_0}$$

Volba polynomu $d(s)$ ve tvaru vícenásobného pólu:

Polynomiální rovnice (22) je ve tvaru:

$$a f \tilde{p} + b q = (s + \alpha)^{\deg d}$$

$$(a_0 + a_1 s) s p_0 + b_0 (q_0 + q_1 s) = (s + \alpha)^2$$

$$b_0 q_0 + (a_0 p_0 + b_0 q_1) s + a_1 p_0 s^2 = \alpha^2 + 2\alpha s + s^2$$

Porovnáním prvků se stejnými mocninami jsou získány vztahy:

$$p_0 = \frac{1}{a_1}, q_0 = \frac{\alpha^2}{b_0}, q_1 = \frac{2\alpha - a_0 p_0}{b_0}$$

Po zvolení α a doplnění známých proměnných jsou získány parametry regulátoru.

Tab. 1. Vypočítané parametry regulátoru
v konfiguraci 1DOF pro soustavu 1

α	p_0	q_0	q_1
0.4	0.83	0.32	1.10
0.6	0.83	0.72	1.90
0.8	0.83	1.28	2.70

Volba polynomu $d(s)$ ve tvaru součinu polynomu $a(s)$ a vícenásobného pólu:

Polynomiální rovnice (22) je ve tvaru:

$$af\tilde{p} + bq = a(s + \alpha)^{\deg d - \deg a}$$

$$(a_0 + a_1s)sp_0 + b_0(q_0 + q_1s) = (a_0 + a_1s)(s + \alpha)$$

$$b_0q_0 + (a_0p_0 + b_0q_1)s + a_1p_0s^2 = a_0\alpha + s(a_0 + a_1\alpha) + a_1s^2$$

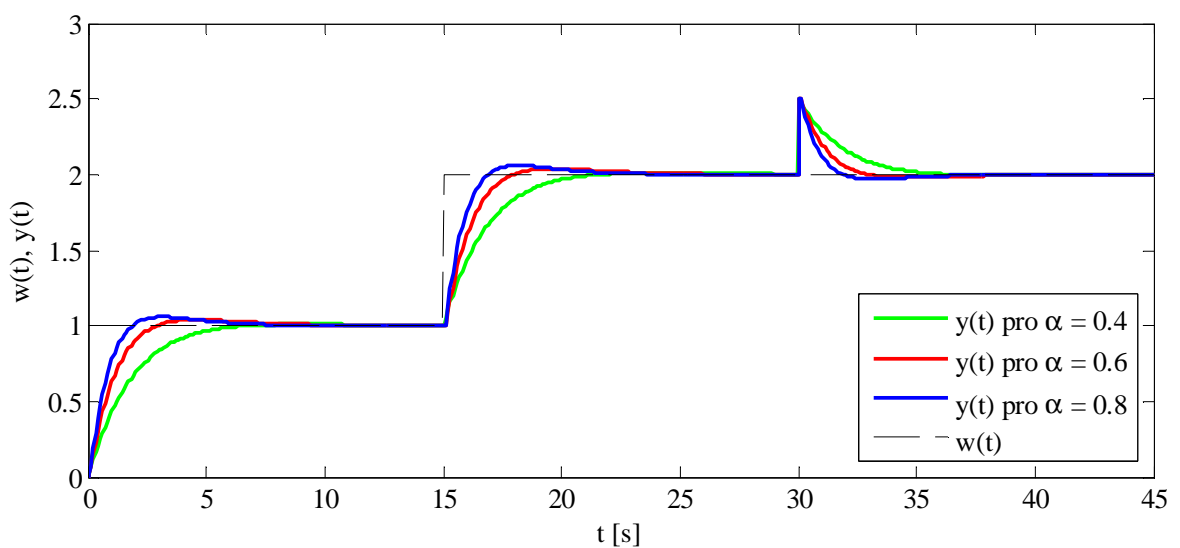
Porovnáním prvků stejného stupně jsou získány vztahy:

$$p_0 = 1, q_0 = \frac{a_0\alpha}{b_0}, q_1 = \frac{a_0 + a_1\alpha - a_0p_0}{b_0}$$

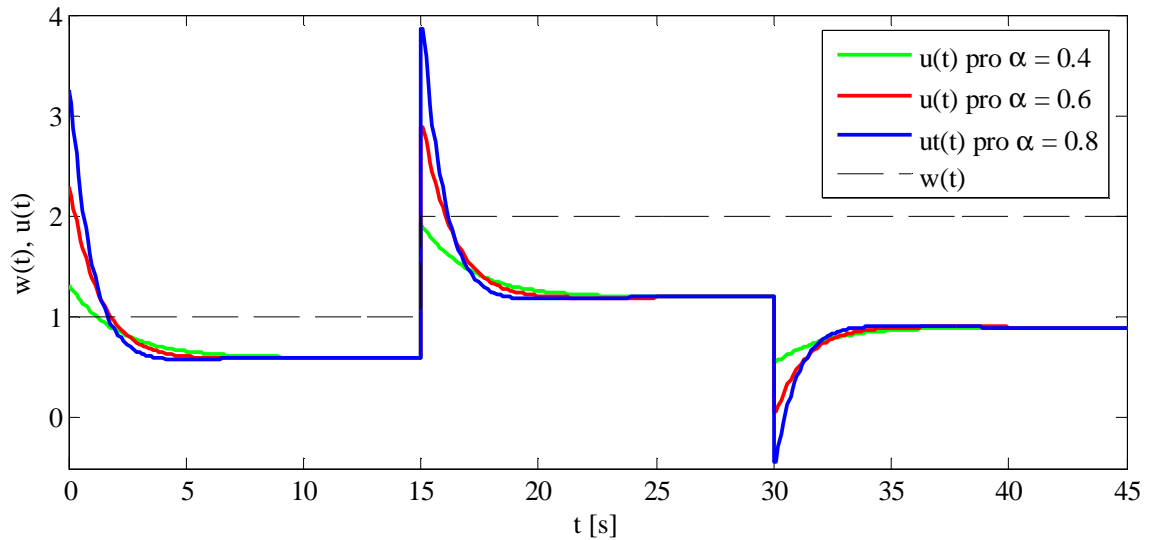
Dosazením $\alpha = 0.6$ a známých koeficientů jsou získány parametry:

$$p_0 = 1, q_0 = 0.36, q_1 = 1.44$$

4.1.2 Simulace 1DOF konfigurace



Obr. 6. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF pro různé α



Obr. 7. Akční zásahy v konfiguraci IDOF pro různé α

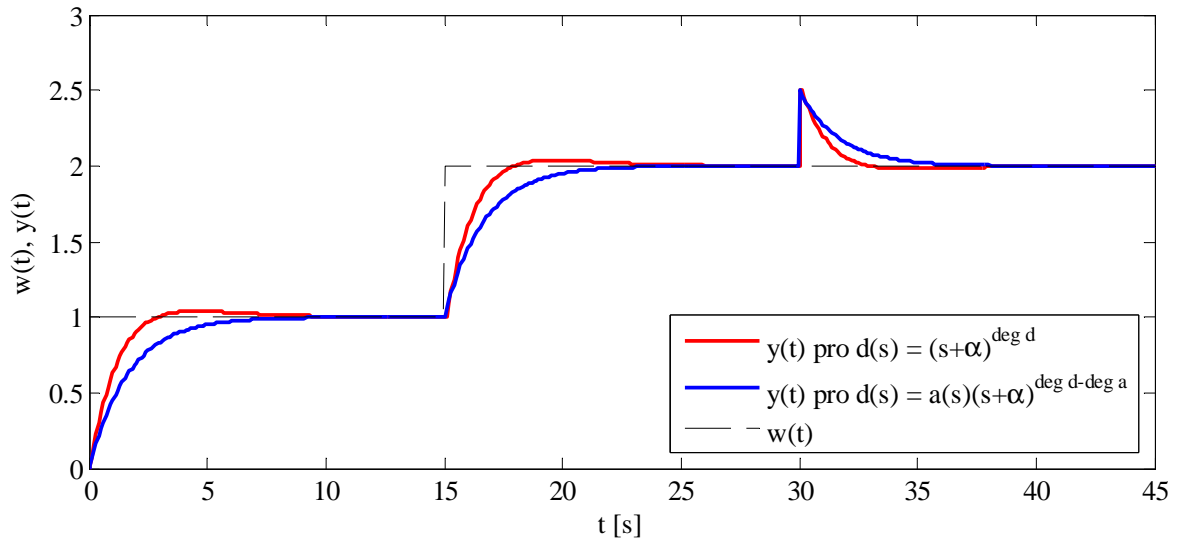
V čase 30 sekund byla do regulačního obvodu zavedena skoková porucha. Pro zjištění vlivu pólu α na kvalitu regulačního procesu byl regulátor naladěn pro různé hodnoty α . Z regulačního pochodu (Obr. 6) lze vidět, že pro všechny možnosti α je získaný regulátor použitelný. Kvalita regulace je však odlišná. Čím vyšší hodnoty α zvolíme, tím rychleji regulovaná veličina dosáhne žádané hodnoty, ale vzniknou i vyšší překymity. Z grafu akčních zásahů (Obr. 7) vyplývá, že čím vyšší je α , tím agresivnější jsou i akční zásahy.

Kvalita regulace byla také vyjádřena pomocí hodnot ISE , které jsou:

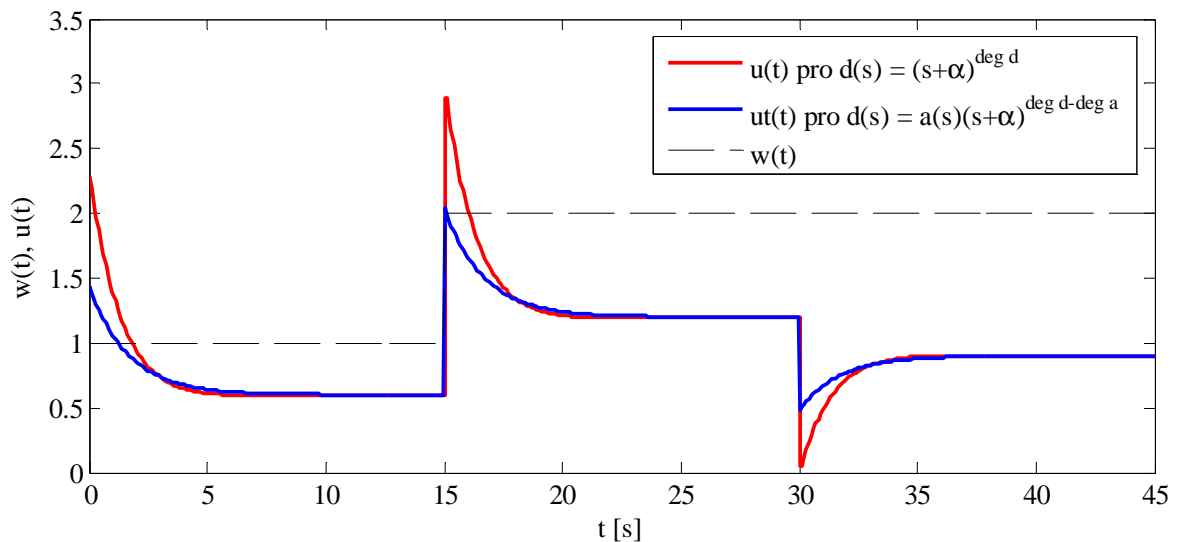
$$\alpha = 0.4 \Rightarrow ISE = 1.95$$

$$\alpha = 0.6 \Rightarrow ISE = 1.10$$

$$\alpha = 0.8 \Rightarrow ISE = 0.77$$



Obr. 8. Porovnání průběhů regulovaných veličin v konfiguraci IDOF pro rozdílné metody volby polynomu $d(s)$



Obr. 9. Akční zásahy v konfiguraci IDOF pro rozdílné metody volby polynomu $d(s)$

Tato simulace byla v obou případech provedena pro $\alpha = 0.6$. Z regulačního pochodu (Obr. 8) vyplývá, že upravením polynomu $d(s)$ do tvaru (64) lze zvýšit kvalitu regulace v oblasti překmitů v kladném i záporném směru, ale rychlost dosažení žádané hodnoty se sníží. Tomu odpovídá i hodnota ISE , pro kterou platí $ISE = 1.88$. Díky pomalejší rychlosti regulace jsou akční zásahy podstatně menší, což lze poznat z grafu akčních veličin (Obr. 9).

4.1.3 Konfigurace 2DOF

Určení stupňů neznámých polynomů:

$$\deg q = \deg a + \deg f_v - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$k \geq \deg f_w - \deg f_v - \deg a = 1 - 1 - 1 = -1 \Rightarrow k = 0$$

$$\deg \tilde{p} = \deg a - 1 + k = 1 - 1 = 0$$

$$\deg d = 2 \deg a + \deg f_v - 1 + k = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$\deg r = \deg f_w - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\deg t = \deg d - \deg f_w = 2 - 1 = 1$$

Zpětnovazební část $Q(s)$ a přímovazební část $R(s)$ regulátoru jsou ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{q}{f_v \tilde{p}_0} = \frac{q_0 + q_1 s}{s p_0}, R(s) = \frac{r}{f_v \tilde{p}_0} = \frac{r_0}{s p_0}$$

Volba polynomu $d(s)$ ve tvaru vícenásobného pólu:

Pro polynomiální rovnici (46) určující parametry regulátoru $Q(s)$ platí:

$$a f_v \tilde{p} + b q = (s + \alpha)^{\deg d}$$

$$(a_0 + a_1 s) s p_0 + b_0 (q_0 + q_1 s) = (s + \alpha)^2$$

Jelikož jsou vstupní signály shodné, je tato rovnice stejná jako v konfiguraci 1DOF. Z toho vyplývá, že parametry zpětnovazebního regulátoru odpovídají tabulce parametrů (Tab. 1) v konfiguraci 1DOF.

Polynomiální rovnice (47) je ve tvaru:

$$t f_w + b r = (s + \alpha)^d$$

$$(t_0 + t_1 s) s + b_0 r_0 = (s + \alpha)^2$$

$$b_0 r_0 + t_0 s + t_1 s^2 = \alpha^2 + 2\alpha s + s^2$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin získáme vztah pro r_0 :

$$r_0 = \frac{\alpha^2}{b_0}$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že parametry r_0 budou totožné s parametry q_0 a tedy platí:

$$\alpha = 0.4 \Rightarrow r_0 = 0.32$$

$$\alpha = 0.6 \Rightarrow r_0 = 0.72$$

$$\alpha = 0.8 \Rightarrow r_0 = 1.28$$

Volba polynomu $d(s)$ ve tvaru součinu polynomu $a(s)$ a vícenásobného pólu:

Parametry regulátoru $Q(s)$ pro $\alpha = 0.6$ jsou opět shodné jako v případě 1DOF konfigurace:

$$p_0 = 1, q_0 = 0.36, q_1 = 1.44$$

Parametry regulátoru $R(s)$ jsou získány řešením polynomiální rovnice (47) ve tvaru:

$$tf_w + br = a(s + \alpha)^{\deg d - \deg a}$$

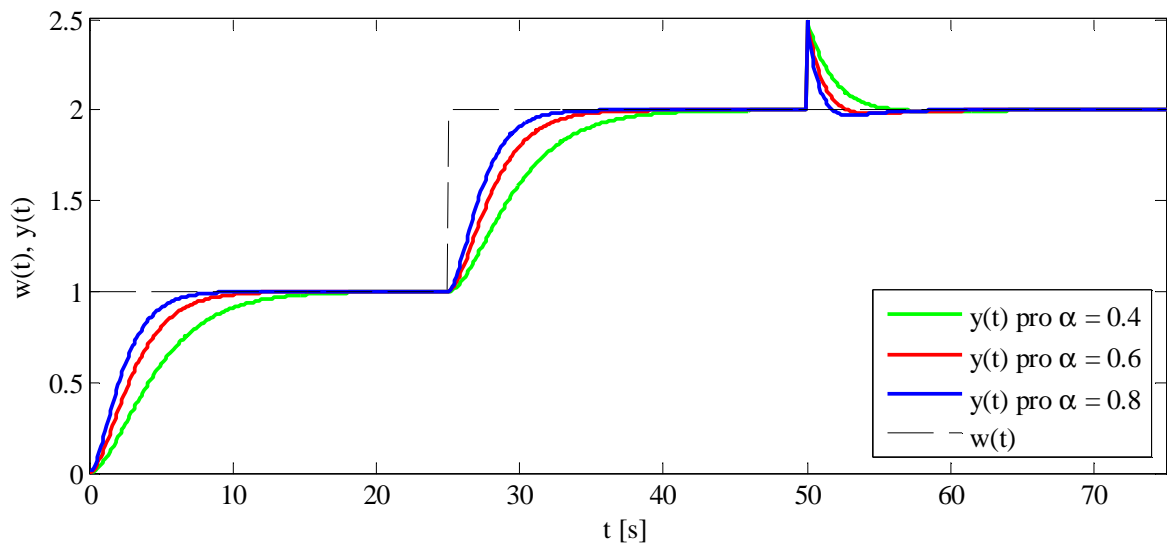
$$(t_0 + t_1s)s + b_0r_0 = (a_0 + a_1s)(s + \alpha)$$

$$b_0r_0 + t_0s + t_1s^2 = a_0\alpha + s(a_0 + a_1\alpha) + a_1s^2$$

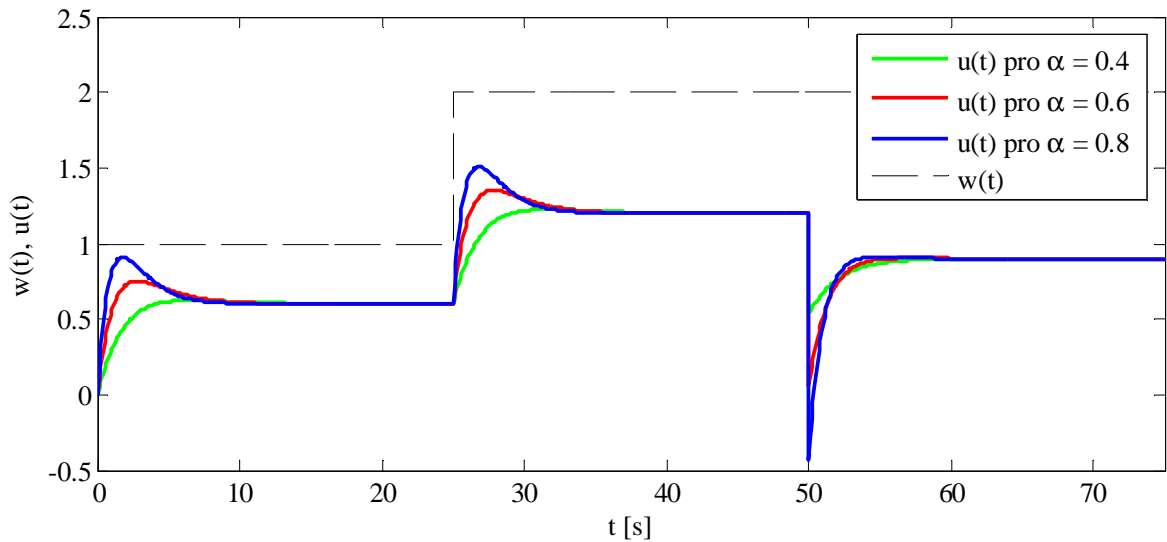
Porovnáním prvků stejného stupně, dosazením $\alpha = 0.6$ a známých koeficientů je získán parametr r_0 :

$$r_0 = \frac{a_0\alpha}{b_0} = \frac{0.18}{0.5} = 0.36$$

4.1.4 Simulace 2DOF konfigurace



Obr. 10. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 2DOF pro různé α



Obr. 11. Akční zásahy v konfiguraci 2DOF pro různé α

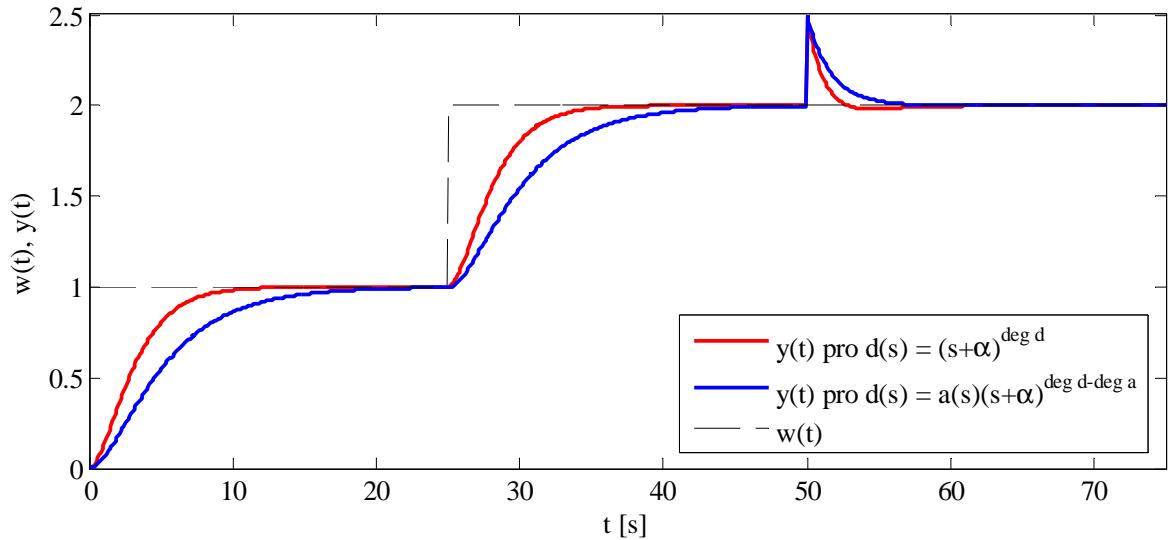
V této simulaci byla skoková porucha zavedena v čase 50 s. Z průběhu regulovaných veličin (Obr. 10) je jasné, že pro všechny hodnoty α se regulovaná veličina ustálí na požadované hodnotě. Velikost α má vliv na rychlost dosažení požadované hodnoty. Čím vyšší α je, tím rychleji je dosažena žádaná hodnota, ale pokud bude α příliš velké vzniknou nežádoucí překmity. Během působení poruchy můžeme vidět nepatrné podkmity regulované veličiny. Z grafu akčních zásahů (Obr. 11) vyplývá, že pro vyšší hodnoty α jsou akční zásahy agresivnější.

Jakost regulace vyčíslena pomocí ISE:

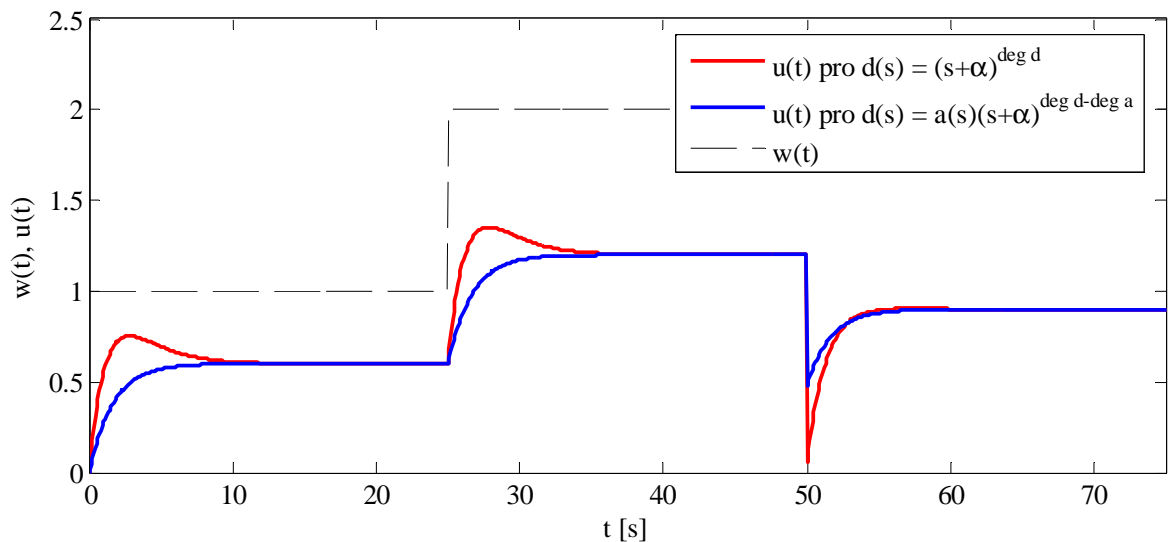
$$\alpha = 0.4 \Rightarrow ISE = 6.46$$

$$\alpha = 0.6 \Rightarrow ISE = 4.28$$

$$\alpha = 0.8 \Rightarrow ISE = 3.21$$



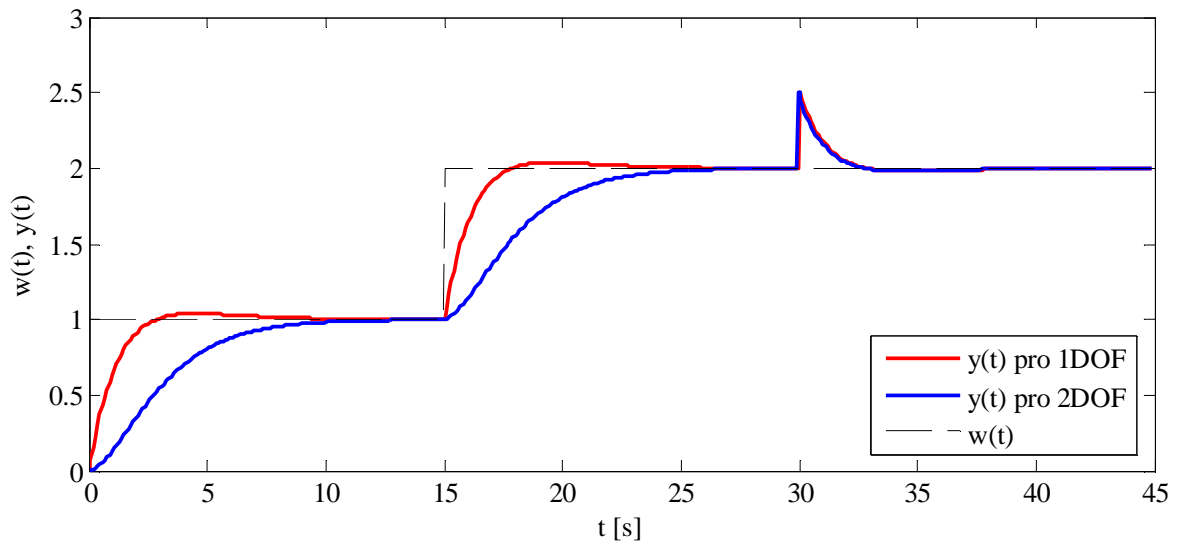
Obr. 12. Porovnání průběhů regulovaných veličin v konfiguraci 2DOF pro rozdílné metody volby polynomu $d(s)$



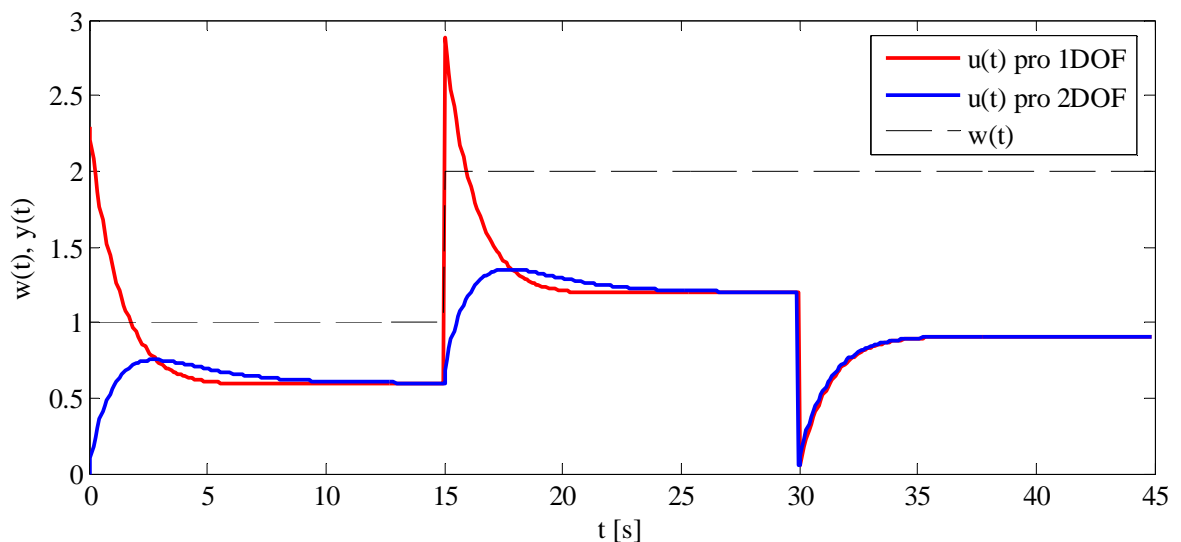
Obr. 13. Akční zásahy v konfiguraci 2DOF pro rozdílné metody volby polynomu $d(s)$

Simulace byla opět provedena pro $\alpha = 0.6$. Jak lze vidět z grafů (Obr. 12) a (Obr. 13), úprava polynomu $d(s)$ do tvaru (64) má stejný vliv jako v konfiguraci 1DOF. Žádaná veličina je dosažena později, ale kvalita regulace v oblasti překmitů je výhodnější. V tomto případě je v čase padesát odstraněn podkmit a hodnota ISE je 7.07. Z toho vyplývá, že tato metoda volby polynomu $d(s)$ je výhodná v případech, kdy dochází k překmitům v záporném či kladném směru. Jelikož má tato metoda stejný vliv v obou konfiguracích, je v dalších regulovaných soustavách volena pouze jedna z těchto metod volby polynomu $d(s)$.

4.1.5 Porovnání 1DOF konfigurace s 2DOF konfigurací



Obr. 14. Porovnání průběhů regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF a 2DOF



Obr. 15. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF a 2DOF

Porovnání konfigurací 1DOF a 2DOF bylo provedeno pro $\alpha = 0.6$ s polynomem $d(s)$ ve tvaru násobného pólu. Z průběhů regulovaných veličin (Obr. 14) vyplývá, že konfigurace 1DOF je podstatně rychlejší, ale za cenu vzniku překmitů nad požadovanou hodnotou. Dále lze vidět, že kompenzace poruchy v čase 30 sekund je v obou případech téměř totožná. Průběhy akčních veličin (Obr. 15) jsou značně rozdílné. V konfiguraci 1DOF akční zásah reaguje na změnu žádané hodnoty formou skoku a poté rychle klesá. V konfiguraci 2DOF akční zásah reaguje na změnu žádané hodnoty pozvolna a také dosahuje podstatně menších hodnot.

4.2 Regulovaná soustava 2

Přenos regulované soustavy:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}, b_0 = 0.12, b_1 = -0.25, a_0 = 0.42, a_1 = 1.3, a_2 = 1$$

Je to tedy nekmitavá stabilní soustava 2. řádu s neminimální fází.

Vstupní signály jsou skokové funkce:

$$w(t) = w_0 1(t), v(t) = v_0 1(t) \Rightarrow W(s) = \frac{w_0}{s}, V(s) = \frac{v_0}{s}$$

kde $v_0 = 0.5$ a žádaná hodnota je na počátku regulace rovna 1 a poté provede skok na hodnotu 2.

Polynom $d(s)$ je v obou konfiguracích ve tvaru (64).

4.2.1 Konfigurace 1DOF

Nejmenší společný násobek $f_w(s)$ a $f_v(s)$:

$$f = LCM [f_w(s), f_v(s)] = s$$

Volba stupňů neznámých polynomů:

$$\deg q = \deg a + \deg f - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$\deg \tilde{p} \geq \deg a - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\deg d \geq 2 \deg a + \deg f - 1 = 4 + 1 - 1 = 4$$

Přenos zpětnovazebního regulátoru $Q(s)$ bude tedy ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{q}{f \tilde{p}_0} = \frac{q_0 + q_1 s + q_2 s^2}{s(p_0 + p_1 s)} = \frac{q_0 + q_1 s + q_2 s^2}{p_0 s + p_1 s^2}$$

Řešení polynomiální rovnice (22):

$$af\tilde{p} + bq = a(s + \alpha)^{\deg d - \deg a}$$

Levá strana rovnice:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 s + a_2 s^2)s(p_0 + p_1 s) + (b_0 + b_1 s)(q_0 + q_1 s + q_2 s^2) = \\ & = b_0 q_0 + (a_0 p_0 + b_0 q_1 + b_1 q_0)s + (a_0 p_1 + a_1 p_0 + b_0 q_2 + b_1 q_1)s^2 \\ & \quad + (a_1 p_1 + a_2 p_0 + b_1 q_2)s^3 + a_2 p_1 s^4 \end{aligned}$$

Pravá strana rovnice:

$$(a_0 + a_1s + a_2s^2)(s + \alpha)^2 =$$

$$= a_0\alpha^2 + (2a_0\alpha + a_1\alpha^2)s + (a_0 + 2a_1\alpha + a_2\alpha^2)s^2 + (a_1 + 2a_2\alpha)s^3 + a_2s^4$$

Porovnáním prvků se stejnými mocninami, na levé a pravé straně rovnice, získáme soustavu rovnic, jejímž řešením jsou vztahy pro výpočet parametrů regulátoru:

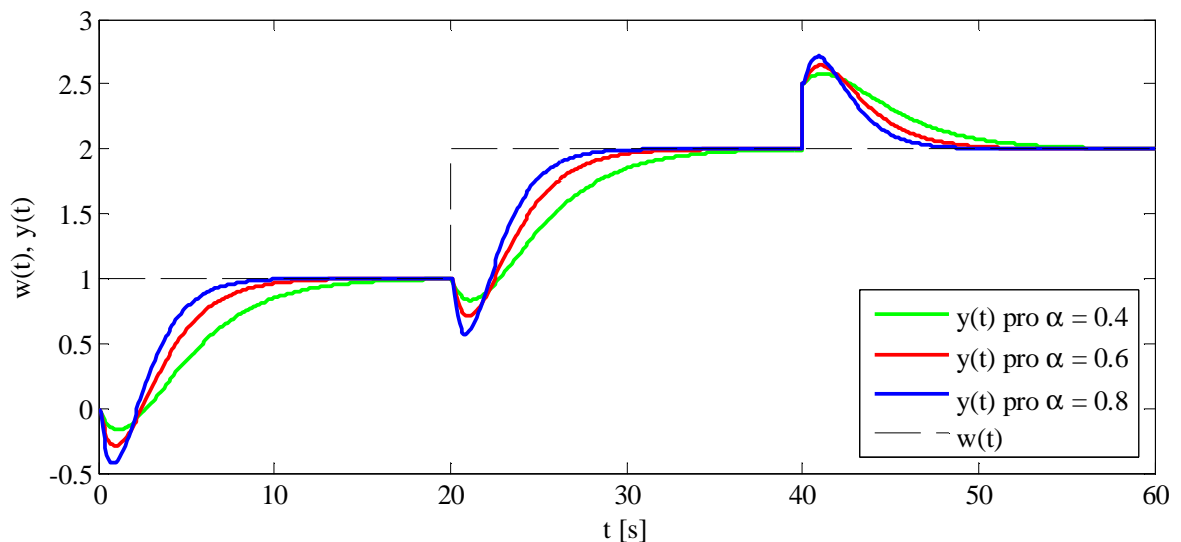
$$q_0 = \frac{a_0\alpha^2}{b_0}, q_1 = \frac{a_1\alpha^2}{b_0}, q_2 = \frac{a_2\alpha^2}{b_0}, p_0 = 2\alpha - \frac{b_1\alpha^2}{b_0}, p_1 = 1$$

Dosazením známých koeficientů a zvolením α jsou získány parametry regulátoru.

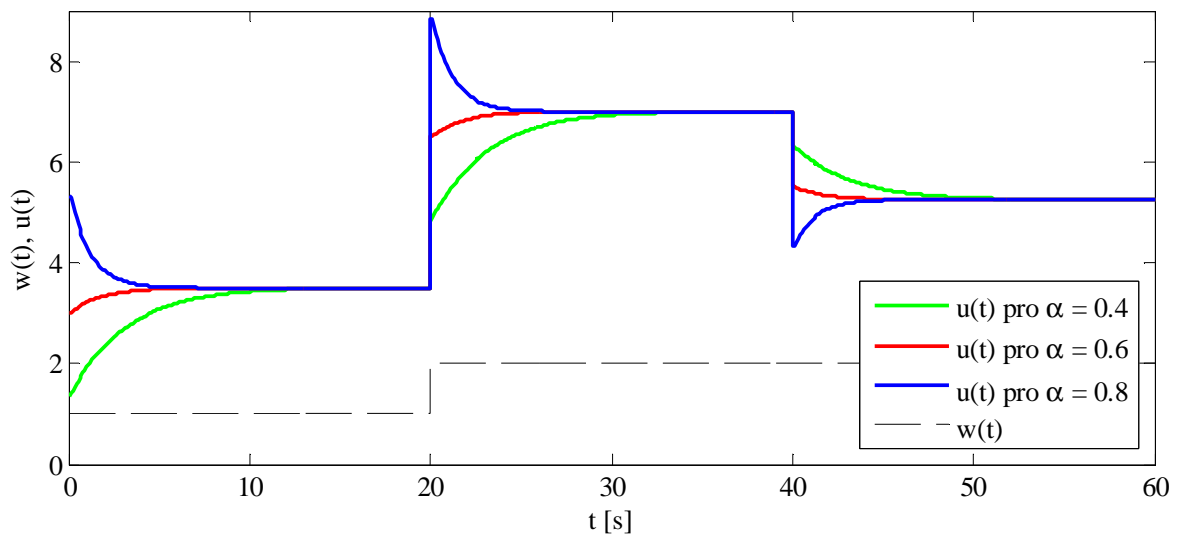
Tab. 2. Vypočítané parametry regulátoru v konfiguraci 1DOF pro soustavu 2

α	p_0	p_1	q_0	q_1	q_2
0.4	1.13	1	0.56	1.73	1.33
0.6	1.95	1	1.26	3.90	3.00
0.8	2.93	1	2.24	6.93	5.33

4.2.2 Simulace 1DOF konfigurace



Obr. 16. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF pro různé α



Obr. 17. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF pro různé α

Během simulace byla v čase 40 s zavedena skoková porucha. Z průběhů regulovaných veličin (Obr. 16) lze vidět, že na počátku regulačního pochodu a během změny žádané hodnoty vznikly podkmity. Dále je vidět, že během působení poruchy vznikly překmity. Zvyšováním hodnoty α lze dosáhnout požadované hodnoty rychleji, ale také se zvětší i zmiňované podkmity a překmity. Z grafu akčních zásahů (Obr. 17) vyplývá, že čím vyšší je α , tím agresivnější je i akční zásah. Hodnoty akčních zásahů, pro regulovanou soustavu s neminimální fází, jsou podstatně vyšší než u soustavy 1, která má minimální fází. Z tohoto důvodu je důležité volit α podle možností regulátoru.

Pro hodnoty ISE platí:

$$\alpha = 0.4 \Rightarrow ISE = 12.7$$

$$\alpha = 0.6 \Rightarrow ISE = 10.84$$

$$\alpha = 0.8 \Rightarrow ISE = 10.16$$

4.2.3 Konfigurace 2DOF

Určení stupňů neznámých polynomů:

$$\deg q = \deg a + \deg f_v - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$k \geq \deg f_w - \deg f_v - \deg a = 1 - 1 - 2 = -2 \Rightarrow k = 0$$

$$\deg \tilde{p} = \deg a - 1 + k = 2 - 1 = 1$$

$$\deg d = 2 \deg a + \deg f_v - 1 + k = 4 + 1 - 1 = 4$$

$$\deg r = \deg f_w - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\deg t = \deg d - \deg f_w = 4 - 1 = 3$$

Zpětnovazební část $Q(s)$ a přímovazební část $R(s)$ regulátoru je ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{q}{f_v \widehat{p}_0} = \frac{q_0 + q_1 s + q_2 s^2}{s(p_0 + p_1 s)} = \frac{q_0 + q_1 s + q_2 s^2}{p_0 s + p_1 s^2}, R(s) = \frac{r}{f_v \widehat{p}_0} = \frac{r_0}{p_0 s + p_1 s^2}$$

Vstupní signály jsou shodné, tedy polynomiální rovnice (46) je stejná jako v konfiguraci 1DOF. Z toho vyplývá, že totožné jsou i vztahy pro výpočet parametrů zpětnovazebního regulátoru. Parametry $Q(s)$ jsou tedy dány tabulkou parametrů (Tab. 2) z konfigurace 1DOF.

Řešení polynomiální rovnice (47):

$$t f_w + b r = a(s + \alpha)^{\deg d - \deg a}$$

Levá strana rovnice:

$$(t_0 + t_1 s + t_2 s^2 + t_3 s^3)s + (b_0 + b_1 s)r_0 = b_0 r_0 + (t_0 + b_1 r_0)s + t_1 s^2 + t_2 s^3 + t_3 s^4$$

Pravá strana rovnice:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 s + a_2 s^2)(s + \alpha)^2 = \\ & = a_0 \alpha^2 + (2a_0 \alpha + a_1 \alpha^2)s + (a_0 + 2a_1 \alpha + a_2 \alpha^2)s^2 + (a_1 + 2a_2 \alpha)s^3 + a_2 s^4 \end{aligned}$$

Porovnáním prvků stejného řádu, na pravé a levé straně rovnice, je získán vztah pro výpočet parametru r_0 :

$$r_0 = \frac{a_0 \alpha^2}{b_0}$$

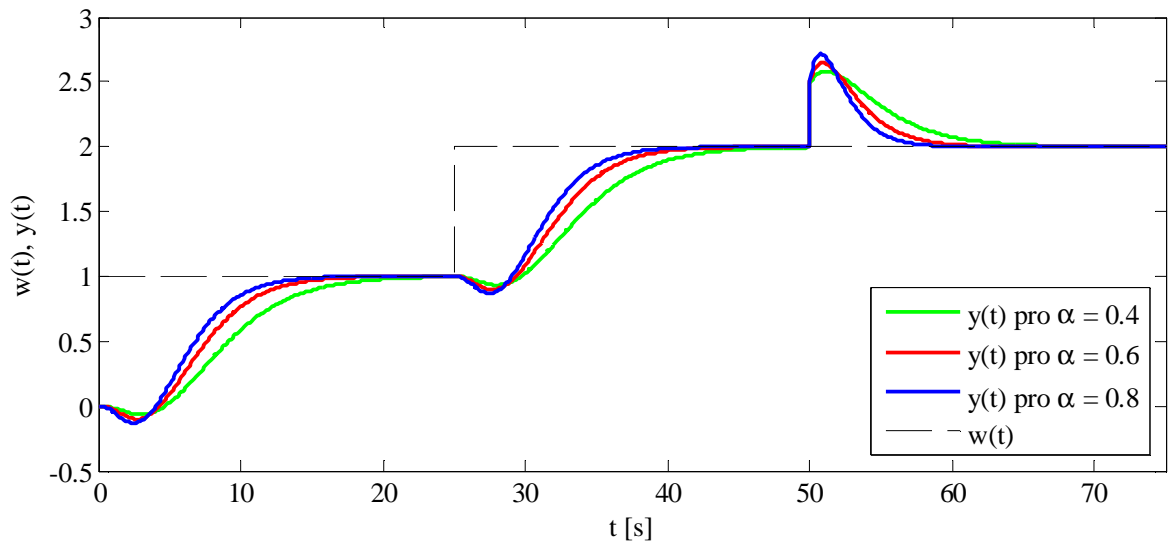
Dosazením α a známých koeficientů jsou získány parametry r_0 :

$$\alpha = 0.4 \Rightarrow r_0 = 0.56$$

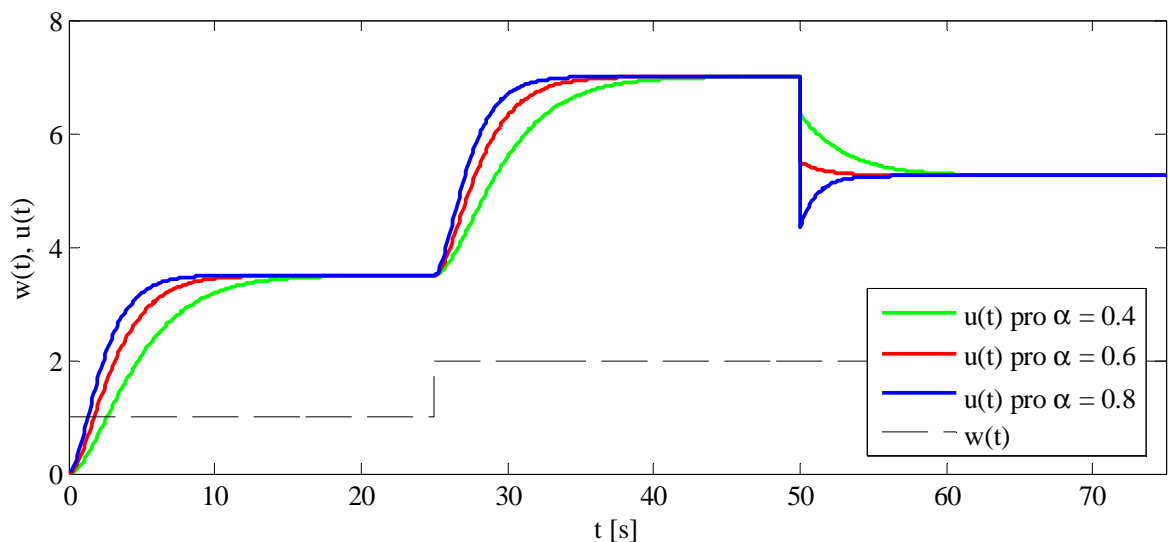
$$\alpha = 0.6 \Rightarrow r_0 = 1.26$$

$$\alpha = 0.8 \Rightarrow r_0 = 2.24$$

4.2.4 Simulace 2DOF konfigurace



Obr. 18. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 2DOF pro různé α



Obr. 19. Akční zásahy v konfiguraci 2DOF pro různé α

V čase 50 s byla zavedena skoková porucha. Z regulačního pochodu (Obr. 18) vyplývá, že na začátku regulace a během změny žádané hodnoty opět vzniknou podkmity. Velikost těchto podkmitů je pro zvolené α nepříliš rozdílná. Z toho vyplývá, že konfigurace 2DOF nám umožňuje podstatně zvýšit rychlost regulace navýšením hodnoty α , za cenu nepatrného zvětšení podkmitů. Při přehnaném zvýšení α , však dojde k podstatnému zvětšení podkmitů a vzniknou i překmity nad žádanou hodnotou. Akční zásahy (Obr. 19) dosahují téměř totožných hodnot, mění se pouze jejich rychlost, které je dána hodnotou α .

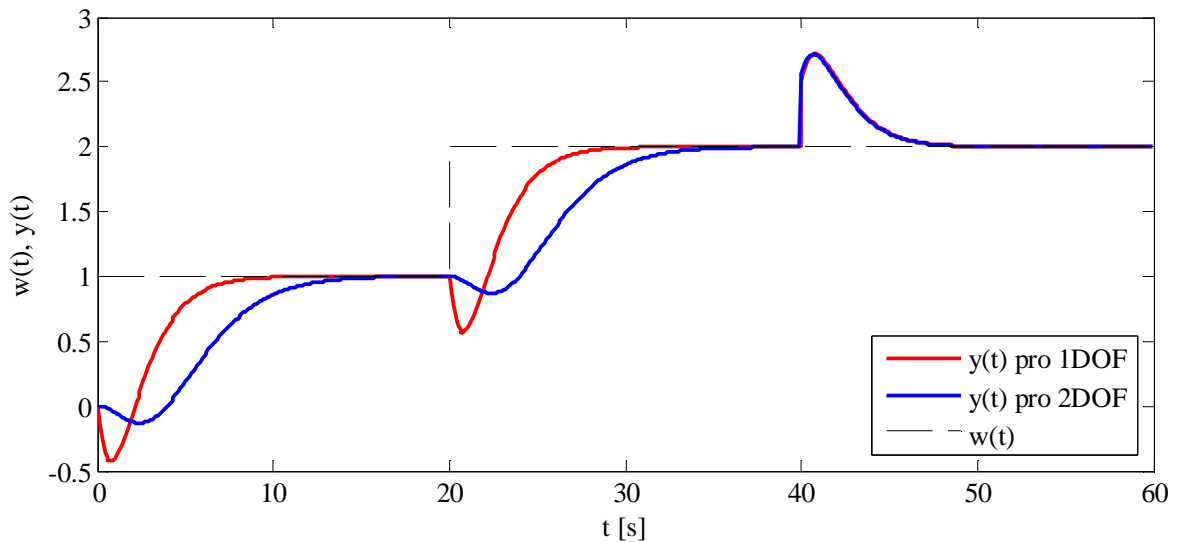
Pro hodnoty ISE platí:

$$\alpha = 0.4 \Rightarrow ISE = 17.89$$

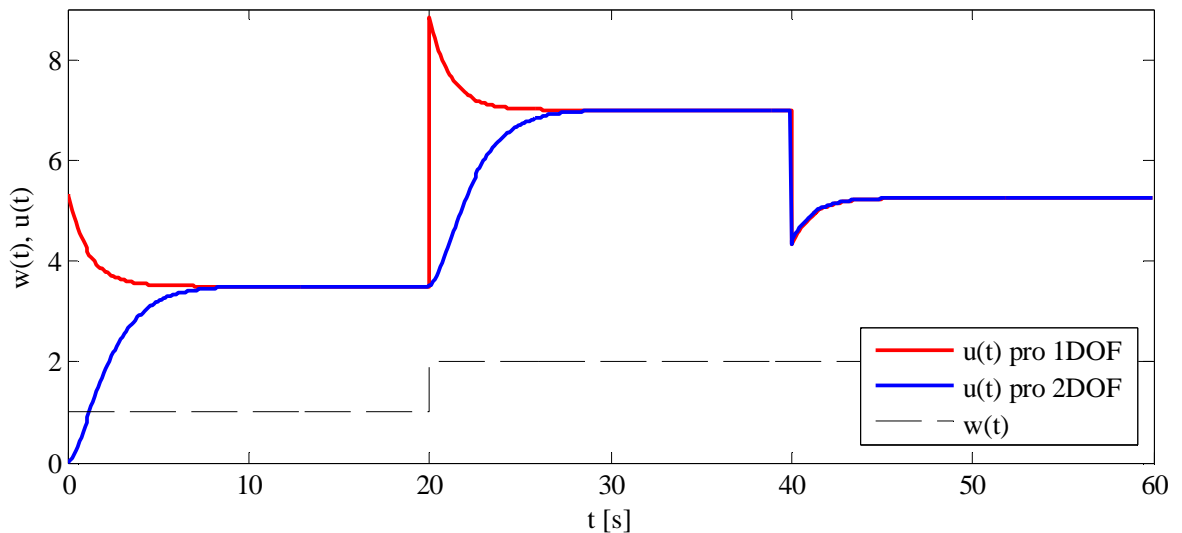
$$\alpha = 0.6 \Rightarrow ISE = 15.55$$

$$\alpha = 0.8 \Rightarrow ISE = 14.37$$

4.2.5 Porovnání 1DOF konfigurace s 2DOF konfigurací



Obr. 20. Porovnání průběhů regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF a 2DOF



Obr. 21. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF a 2DOF

Simulace byla provedena pro $\alpha = 0.8$. Z průběhů regulovaných veličin (Obr. 20) vyplývá, že v konfiguraci 2DOF je žádaná hodnota dosažena později, ale podkmity jsou o poznání menší. Kompensace poruchy v čase 40 s je v obou případech totožná. Akční zásahy (Obr.

21) v konfiguraci 2DOF, na rozdíl od konfigurace 1DOF, se mění plynule a nedosahují tak velkých hodnot. Díky tomu nejsou požadavky na hledaný regulátor tak vysoké.

4.3 Regulovaná soustava 3

Přenos regulované soustavy:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s}{a_0 + a_1s + a_2s^2}, b_0 = 0.12, b_1 = 0.2, a_0 = -0.15, a_1 = 0.2, a_2 = 1$$

Jedná se o nestabilní nekmitavý systém 2. řádu s minimální fází.

Vstupní signály jsou dány skokovými funkcemi:

$$w(t) = w_0 1(t), v(t) = v_0 1(t) \Rightarrow W(s) = \frac{w_0}{s}, V(s) = \frac{v_0}{s}$$

kde $v_0 = 0.5$ a žádaná hodnota je na počátku regulace rovna 1 a poté provede skok na hodnotu 2.

Polynom $d(s)$ je zvolen ve tvaru (65).

4.3.1 Konfigurace 1DOF

Nejmenší společný násobek $f_w(s)$ a $f_v(s)$:

$$f = LCM [f_w(s), f_v(s)] = s$$

Volba stupňů neznámých polynomů:

$$\deg q = \deg a + \deg f - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$\deg \tilde{p} \geq \deg a - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\deg d \geq 2 \deg a + \deg f - 1 = 4 + 1 - 1 = 4$$

Přenos zpětnovazebního regulátoru $Q(s)$ bude tedy ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{q}{f \tilde{p}_0} = \frac{q_0 + q_1s + q_2s^2}{s(p_0 + p_1s)} = \frac{q_0 + q_1s + q_2s^2}{p_0s + p_1s^2}$$

Řešení polynomiální rovnice (22):

$$af\tilde{p} + bq = n(s + \alpha)^{\deg d - \deg a}$$

Levá strana rovnice:

$$(a_0 + a_1s + a_2s^2)s(p_0 + p_1s) + (b_0 + b_1s)(q_0 + q_1s + q_2s^2) =$$

$$= b_0q_0 + (a_0p_0 + b_0q_1 + b_1q_0)s + (a_0p_1 + a_1p_0 + b_0q_2 + b_1q_1)s^2 + (a_1p_1 + a_2p_0 + b_1q_2)s^3 + a_2p_1s^4$$

Pravá strana rovnice:

$$(n_0 + n_1s + n_2s^2)(s + \alpha)^2 = \\ = n_0\alpha^2 + (2n_0\alpha + n_1\alpha^2)s + (n_0 + 2n_1\alpha + n_2\alpha^2)s^2 + (n_1 + 2n_2\alpha)s^3 + n_2s^4$$

Porovnáním prvků se stejnými mocninami je získána soustava rovnic:

$$b_0q_0 = n_0\alpha^2 \\ a_0p_0 + b_0q_1 + b_1q_0 = 2n_0\alpha + n_1\alpha^2 \\ a_0p_1 + a_1p_0 + b_0q_2 + b_1q_1 = n_0 + 2n_1\alpha + n_2\alpha^2 \\ a_1p_1 + a_2p_0 + b_1q_2 = n_1 + 2n_2\alpha \\ a_2p_1 = n_2$$

Neznámý polynom n je určen řešením rovnice (66):

$$a^*(s)a(s) = n^*(s)n(s) \\ (a_0 - a_1s + a_2s^2)(a_0 + a_1s + a_2s^2) = (n_0 - n_1s + n_2s^2)(n_0 + n_1s + n_2s^2) \\ a_0^2 + (2a_0a_2 - a_1^2)s^2 + a_2^2s^4 = n_0^2 + (2n_0n_2 - n_1^2)s^2 + n_2^2s^4$$

Porovnáním prvků se stejnými mocninami jsou získány vztahy pro výpočet polynomu n :

$$n_0 = \sqrt{a_0^2}, n_1 = \sqrt{2n_0n_2 + a_1^2 - 2a_0a_2}, n_2 = \sqrt{a_2^2}$$

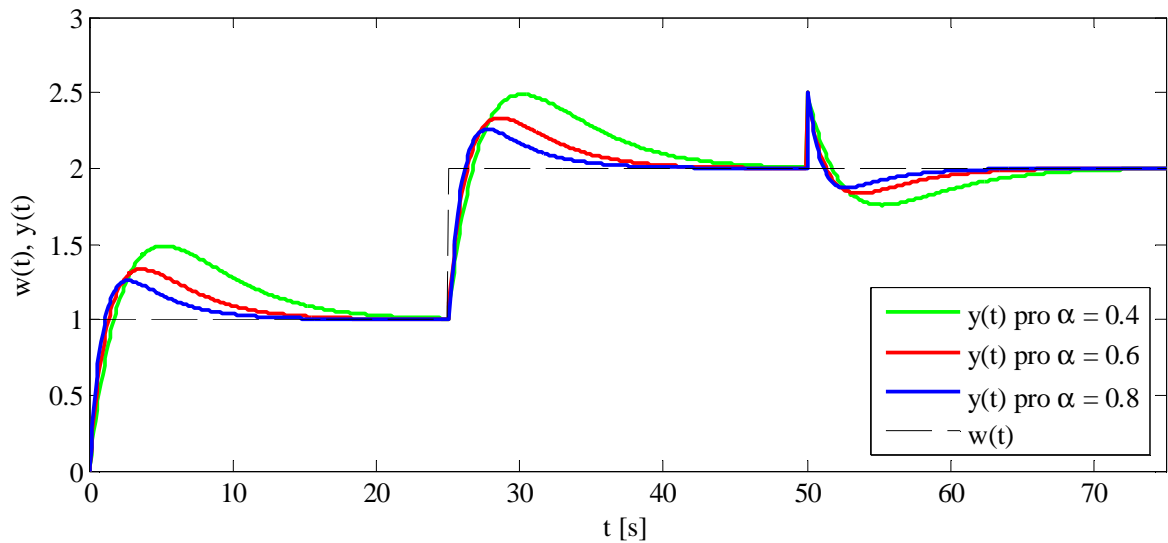
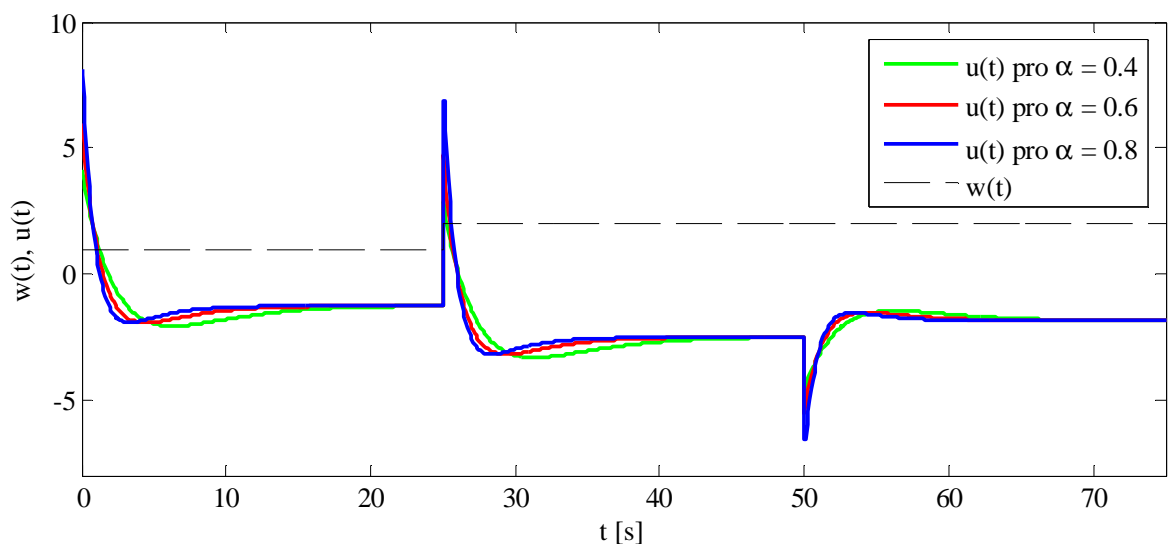
Vyřešením soustavy rovnic a dosazením vztahů pro polynom n jsou získány vztahy pro výpočet parametrů regulátoru. Tyto vztahy jsou zdlouhavé a nepřehledné, proto zde nejsou uvedeny, pro úplnost, jsou však uvedeny v příloze (P I).

Parametry regulátoru jsou uvedeny v tabulce (Tab. 3).

Tab. 3. Vypočítané parametry regulátoru v konfiguraci IDOF pro soustavu 3

α	p_0	p_1	q_0	q_1	q_2
0.4	0.58	1	0.20	2.46	4.11
0.6	0.60	1	0.45	3.90	6.00
0.8	0.58	1	0.80	5.66	8.11

4.3.2 Simulace 1DOF konfigurace

Obr. 22. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF pro různé α Obr. 23. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF pro různé α

Z průběhů regulovaných veličin (Obr. 22) vyplývá, že polynomiální metoda je použitelná i pro nestabilní soustavy. Hodnota pólu α ovlivňuje rychlost regulace, ale také velikost překmitů nad žádanou hodnotou a velikost podkmitů během působení poruchy, která byla zavedena v čase 50 s. Čím vyšší je α , tím rychleji je dosaženo žádané hodnoty a velikost kmitů nad i pod žádanou hodnotou se sníží. Akční zásahy (Obr. 23) jsou pro vyšší hodnoty α agresivnější.

Velikost ISE pro jednotlivé α :

$$\alpha = 0.4 \Rightarrow ISE = 4.36$$

$$\alpha = 0.6 \Rightarrow ISE = 1.88$$

$$\alpha = 0.8 \Rightarrow ISE = 1.07$$

4.3.3 Konfigurace 2DOF

Určení stupňů neznámých polynomů:

$$\deg q = \deg a + \deg f_v - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$k \geq \deg f_w - \deg f_v - \deg a = 1 - 1 - 2 = -2 \Rightarrow k = 0$$

$$\deg \tilde{p} = \deg a - 1 + k = 2 - 1 = 1$$

$$\deg d = 2 \deg a + \deg f_v - 1 + k = 4 + 1 - 1 = 4$$

$$\deg r = \deg f_w - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\deg t = \deg d - \deg f_w = 4 - 1 = 3$$

Zpětnovazební část $Q(s)$ a přímovazební část $R(s)$ regulátoru je ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{q}{f_v \tilde{p}_0} = \frac{q_0 + q_1 s + q_2 s^2}{s(p_0 + p_1 s)} = \frac{q_0 + q_1 s + q_2 s^2}{p_0 s + p_1 s^2}, R(s) = \frac{r}{f_v \tilde{p}_0} = \frac{r_0}{p_0 s + p_1 s^2}$$

Parametry regulátoru $Q(s)$ jsou shodné s tabulkou parametrů (Tab. 3) z 1DOF konfigurace.

Řešení polynomiální rovnice (47):

$$t f_w + b r = n(s + \alpha)^{\deg d - \deg a}$$

Levá strana rovnice:

$$(t_0 + t_1 s + t_2 s^2 + t_3 s^3)s + (b_0 + b_1 s)r_0 = b_0 r_0 + (t_0 + b_1 r_0)s + t_1 s^2 + t_2 s^3 + t_3 s^4$$

Pravá strana rovnice:

$$\begin{aligned} & (n_0 + n_1 s + n_2 s^2)(s + \alpha)^2 = \\ & = n_0 \alpha^2 + (2n_0 \alpha + n_1 \alpha^2)s + (n_0 + 2n_1 \alpha + n_2 \alpha^2)s^2 + (n_1 + 2n_2 \alpha)s^3 + n_2 s^4 \end{aligned}$$

Porovnáním prvků stejného řádu, na pravé a levé straně rovnice, je získán vztah pro výpočet parametru r_0 :

$$r_0 = \frac{n_0 \alpha^2}{b_0} = \frac{\sqrt{a_0^2} \alpha^2}{b_0}$$

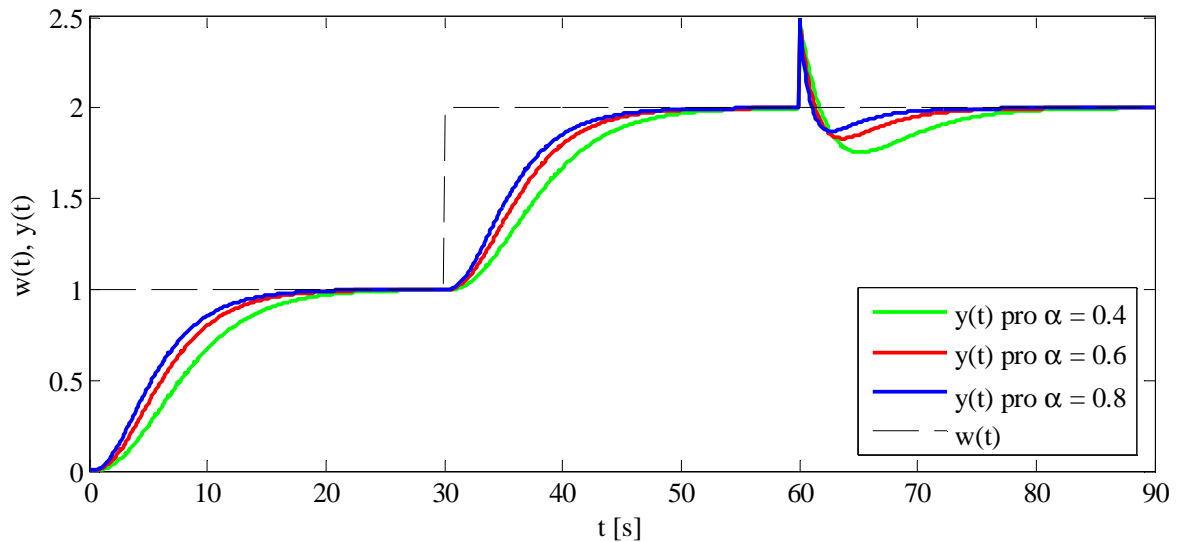
Dosažením α a známých koeficientů jsou získány parametry r_0 :

$$\alpha = 0.4 \Rightarrow r_0 = 0.20$$

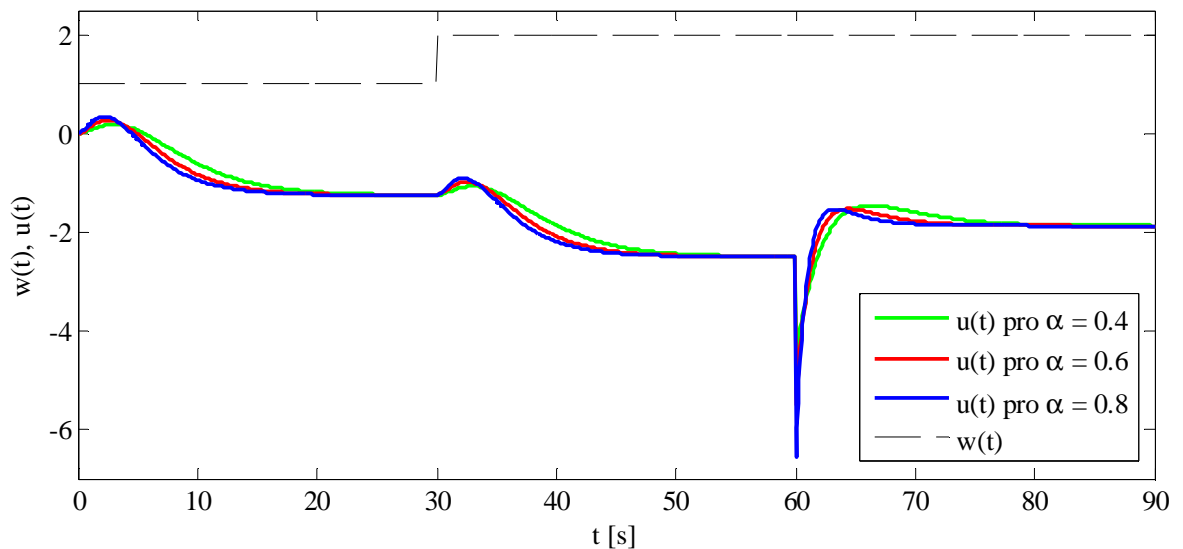
$$\alpha = 0.6 \Rightarrow r_0 = 0.45$$

$$\alpha = 0.8 \Rightarrow r_0 = 0.80$$

4.3.4 Simulace 2DOF konfigurace



Obr. 24. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 2DOF pro různé α



Obr. 25. Akční zásahy v konfiguraci 2DOF pro různé α

Z regulačního (Obr. 24) pochodu vyplývá, že nestabilní soustavy nejsou pro konfiguraci 2DOF žádný problém. Regulované veličiny, pro všechny α , dosahují žádané hodnoty bez překmitů. Čím vyšší α , tím vyšší je rychlost regulace, ale v čase 60 s jsou i větší podkmity,

kteřé jsou způsobeny skokovou poruchou. Akční zásahy (Obr. 25) jsou na počátku regulačního pochodu kladné, ale dále dosahují pouze záporných hodnot.

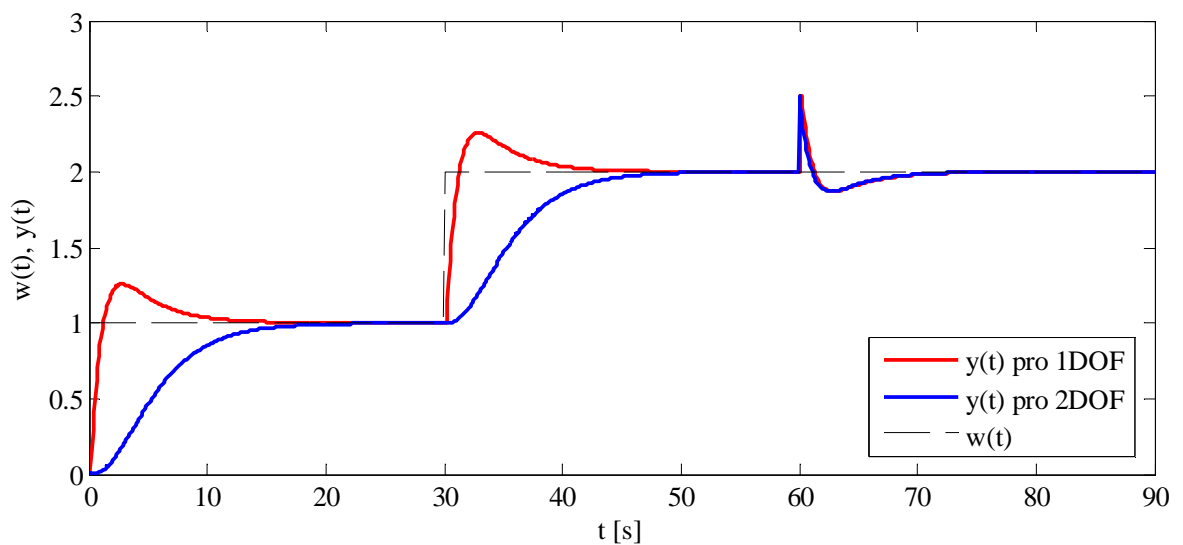
Hodnoty ISE pro jednotlivé α :

$$\alpha = 0.4 \Rightarrow ISE = 12.44$$

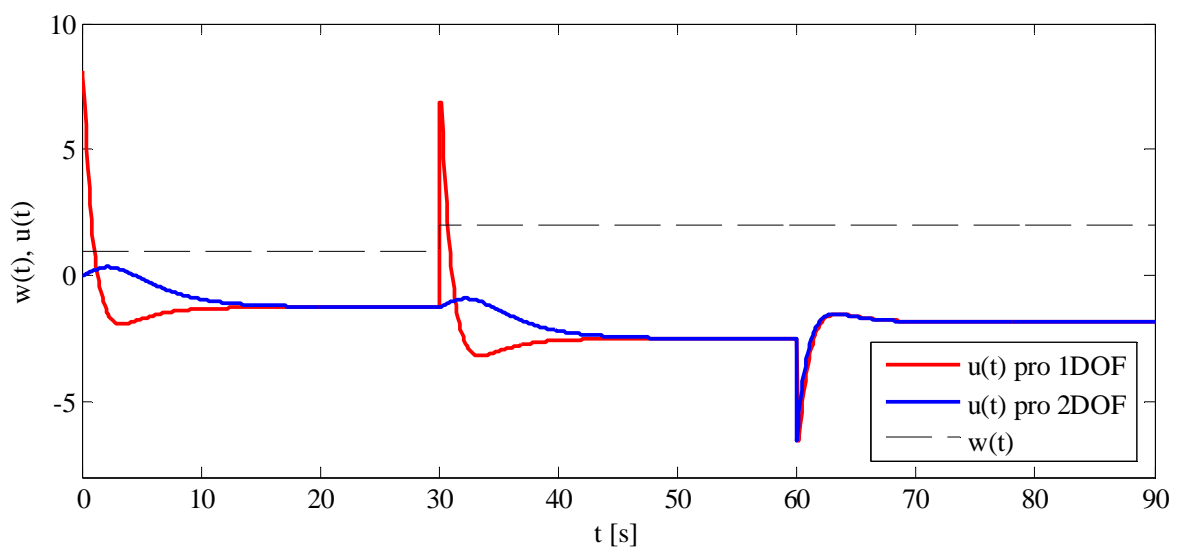
$$\alpha = 0.6 \Rightarrow ISE = 9.69$$

$$\alpha = 0.8 \Rightarrow ISE = 8.30$$

4.3.5 Porovnání 1DOF konfigurace s 2DOF konfigurací



Obr. 26. Porovnání průběhů regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF a 2DOF



Obr. 27. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF a 2DOF

Simulace byla provedena pro $\alpha = 0.8$ a porucha byla zavedena v čase 60 s. Rychlost ustálení regulované veličiny (Obr. 26) na žádané hodnotě je v obou konfiguracích téměř totožná. V případě 1DOF konfigurace je počáteční rychlost regulace vysoká, ale vzniká překmit a poté regulovaná veličina pozvolna klesá na žádanou hodnotu. V konfiguraci 2DOF je počáteční rychlost regulace nižší a žádané hodnoty je dosaženo pozvolna, bez vzniku překmitu. Z grafu akčních zásahů (Obr. 27) vyplývá, že v obou konfiguracích jsou maximální záporné hodnoty totožné. Regulátor v konfiguraci 1DOF reaguje na změnu žádané hodnoty tak, že generuje velmi agresivní akční zásah. V případě 2DOF je akční zásah minimální. Konfigurace 2DOF je tedy vhodnější volbou pro nestabilní regulované soustavy.

4.4 Regulovaná soustava 4

Přenos regulované soustavy:

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s}, b_0 = 0.3, a_0 = 0.16, a_1 = 0.4$$

Je to stabilní nekmitavá soustava prvního řádu s minimální fází.

Žádaná veličina je dána funkcí sinus:

$$w(t) = Am \sin \omega t \Rightarrow W(s) = Am \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$$

kde amplituda $Am = 1$ a úhlová frekvence $\omega = 0.377$.

Poruchová veličina je skoková funkce:

$$v(t) = v_0 1(t) \Rightarrow V(s) = \frac{v_0}{s}$$

kde $v_0 = -0.5$.

Polynom $d(s)$ je volen ve tvaru (64).

4.4.1 Konfigurace 1DOF

Nejmenší společný násobek $f_w(s)$ a $f_v(s)$ je dán:

$$f = LCM [f_w(s), f_v(s)] = s(\omega^2 + s^2)$$

Volba stupňů neznámých polynomů:

$$\deg q = \deg a + \deg f - 1 = 1 + 3 - 1 = 3$$

$$\deg \tilde{p} \geq \deg a - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\deg d \geq 2 \deg a + \deg f - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$$

Přenos zpětnovazebního regulátoru $Q(s)$ bude tedy ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{q}{f\tilde{p}_0} = \frac{q_0 + q_1s + q_2s^2 + q_3s^3}{s(\omega^2 + s^2)p_0} = \frac{q_0 + q_1s + q_2s^2 + q_3s^3}{\omega^2p_0s + p_0s^3}$$

Řešení polynomiální rovnice (22):

$$af\tilde{p} + bq = a(s + \alpha)^{\deg d}$$

Pravá strana rovnice:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1s)(\omega^2p_0s + p_0s^3) + b_0(q_0 + q_1s + q_2s^2 + q_3s^3) = \\ & = b_0q_0 + (b_0q_1 + a_0p_0\omega^2)s + (b_0q_2 + a_1p_0\omega^2)s^2 + (a_0p_0 + b_0q_3)s^3 + a_1p_0s^4 \end{aligned}$$

Levá strana rovnice:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1s)(s + \alpha)^3 = \\ & a_0\alpha^3 + (3a_0\alpha^2 + a_1\alpha^3)s + (3a_0\alpha + 3a_1\alpha^2)s^2 + (a_0 + 3a_1\alpha)s^3 + a_1s^4 \end{aligned}$$

Porovnáním prvků se stejnými mocninami, levé a pravé strany rovnice, získáme vztahy pro výpočet regulátoru $Q(s)$:

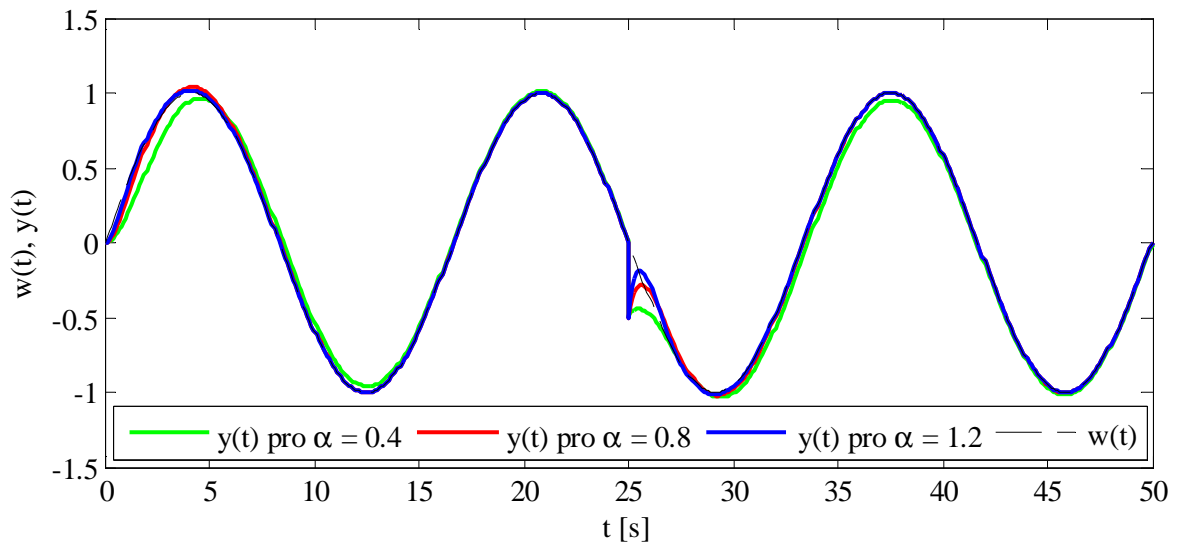
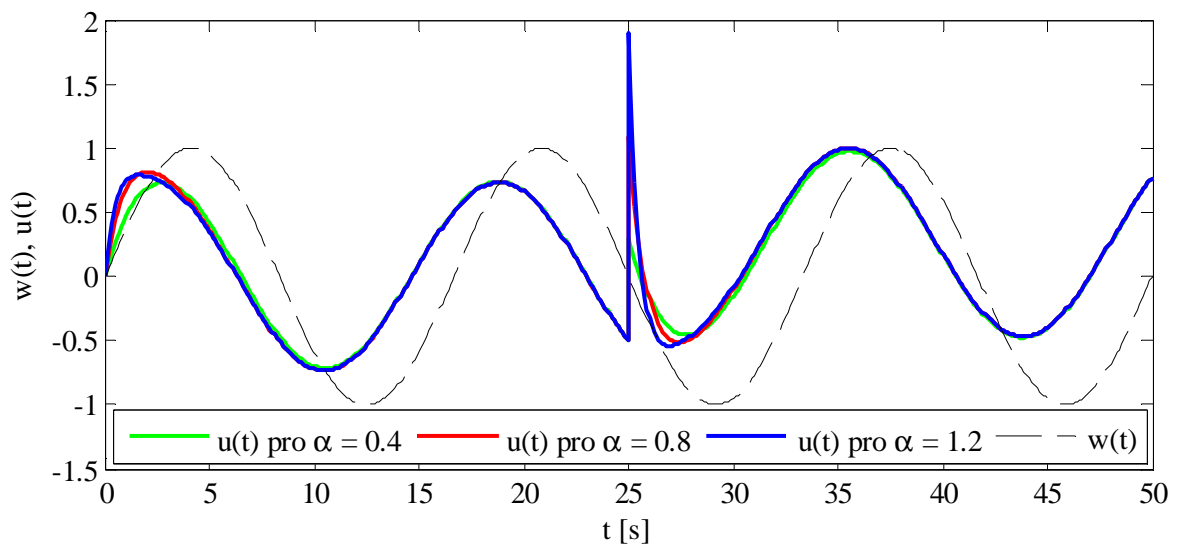
$$\begin{aligned} p_0 = 1, q_0 &= \frac{a_0\alpha^3}{b_0}, q_1 = \frac{3a_0\alpha^2 + a_1\alpha^3 - a_0p_0\omega^2}{b_0}, \\ q_2 &= \frac{3a_0\alpha + 3a_1\alpha^2 - a_1p_0\omega^2}{b_0}, q_3 = \frac{a_0 + 3a_1\alpha - a_0p_0}{b_0} \end{aligned}$$

Zvolením α a dosazením známých prvků jsou získány parametry zpětnovazebního regulátoru.

Tab. 4. Vypočítané parametry regulátoru v konfiguraci IDOF pro soustavu 4

α	p_0	q_0	q_1	q_2	q_3
0.4	1	0.03	0.27	1.09	1.60
0.8	1	0.27	1.63	3.65	3.20
1.2	1	0.92	4.53	7.49	4.80

4.4.2 Simulace 1DOF konfigurace

Obr. 28. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF pro různé α Obr. 29. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF pro různé α

Z průběhu regulace (Obr. 28) vyplývá, že polynomiální metoda je vhodná i pro obvody s žádanou veličinou ve formě funkce sinus. Rychlost dosažení žádané hodnoty je závislá na velikosti α . Čím vyšší je α , tím rychleji je dosažena žádaná hodnota a v čase 25 s, kdy byla zavedena skoková porucha, je rychlejší i kompenzace poruchy. U všech průběhů regulovaných veličin lze vidět, že došlo k malému přesahu žádané hodnoty na počátku regulace a během působení poruchy, poté se však všechny průběhy ustálily na požadované hodnotě. Z grafu akčních zásahů (Obr. 29) je zřejmé, že i akční zásahy mají tvar funkce sinus. Jejich průběhy jsou téměř totožné, kromě počátku regulace a v době působení poruchy. V těchto

časových úsecích je jejich hodnota závislá na velikosti α , pro větší hodnoty α dosahují akční zásahy vyšších hodnot.

Pro hodnoty ISE platí:

$$\alpha = 0.4 \Rightarrow ISE = 0.28$$

$$\alpha = 0.8 \Rightarrow ISE = 0.07$$

$$\alpha = 1.2 \Rightarrow ISE = 0.04$$

4.4.3 Konfigurace 2DOF

Určení stupňů neznámých polynomů:

$$\deg q = \deg a + \deg f_v - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$k \geq \deg f_w - \deg f_v - \deg a = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\deg \tilde{p} = \deg a - 1 + k = 1 - 1 = 0$$

$$\deg d = 2 \deg a + \deg f_v - 1 + k = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$\deg r = \deg f_w - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\deg t = \deg d - \deg f_w = 2 - 2 = 0$$

Pro zpětnovazební část $Q(s)$ a přímovazební část $R(s)$ regulátoru platí:

$$Q(s) = \frac{q}{f_v \tilde{p}_0} = \frac{q_0 + q_1 s}{s p_0}, R(s) = \frac{r}{f_v \tilde{p}_0} = \frac{r_0 + r_1 s}{s p_0}$$

Řešení polynomiální rovnice (46):

$$a f_v \tilde{p} + b q = a(s + \alpha)^{\deg d - \deg a}$$

$$(a_0 + a_1 s) s p_0 + b_0 (q_0 + q_1 s) = (a_0 + a_1 s)(s + \alpha)$$

$$b_0 q_0 + (a_0 p_0 + b_0 q_1) s + a_1 p_0 s^2 = a_0 \alpha + s(a_0 + a_1 \alpha) + a_1 s^2$$

Porovnáním prvků stejného stupně jsou získány vztahy:

$$p_0 = 1, q_0 = \frac{a_0 \alpha}{b_0}, q_1 = \frac{a_0 + a_1 \alpha - a_0 p_0}{b_0}$$

Zvolením α a dosazením známých koeficientů získáme parametry regulátoru $Q(s)$.

Tab. 5. Vypočítané parametry regulátoru $Q(s)$ v konfiguraci 2DOF pro soustavu 4

α	p_0	q_0	q_1
0.4	1	0.21	0.53
0.8	1	0.43	1.07
1.2	1	0.64	1.60

Řešení polynomiální rovnice (47):

$$tf_w + br = a(s + \alpha)^{\deg d - \deg a}$$

$$t_0(\omega^2 + s^2) + b_0(r_0 + r_1s) = (a_0 + a_1s)(s + \alpha)$$

$$t_0\omega^2 + b_0r_0 + b_0r_1s + t_0s^2 = a_0\alpha + s(a_0 + a_1\alpha) + a_1s^2$$

Porovnáním prvků se stejnými mocninami získáme vztahy pro výpočet parametrů r_0 a r_1 :

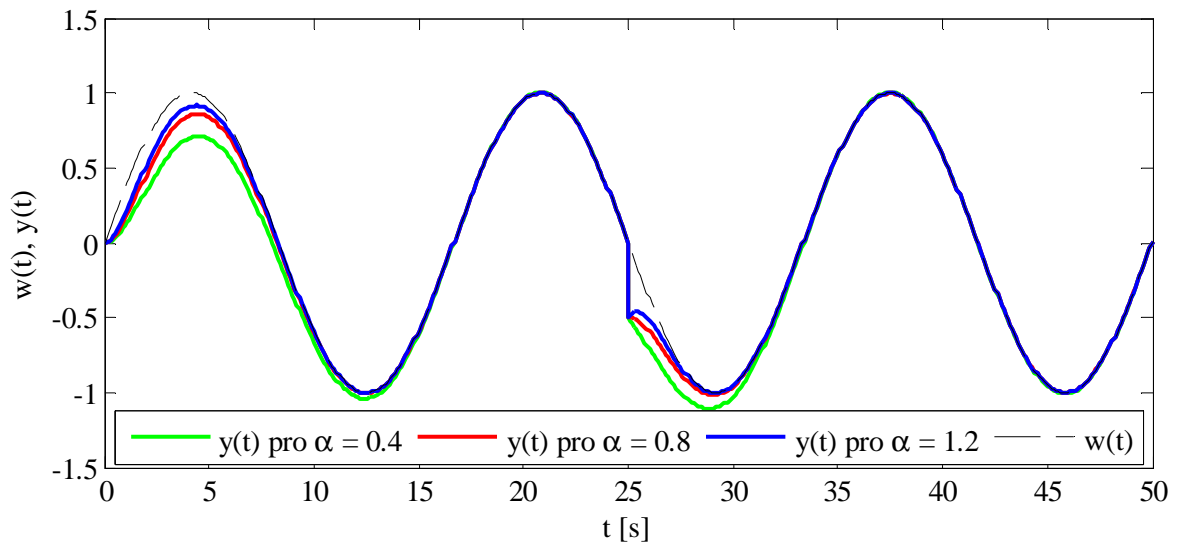
$$t_0 = a_1, r_0 = \frac{a_0\alpha - t_0\omega^2}{b_0}, r_1 = \frac{a_0 + a_1\alpha}{b_0}$$

Dosazením známých proměnných jsou získány parametry regulátoru $R(s)$.

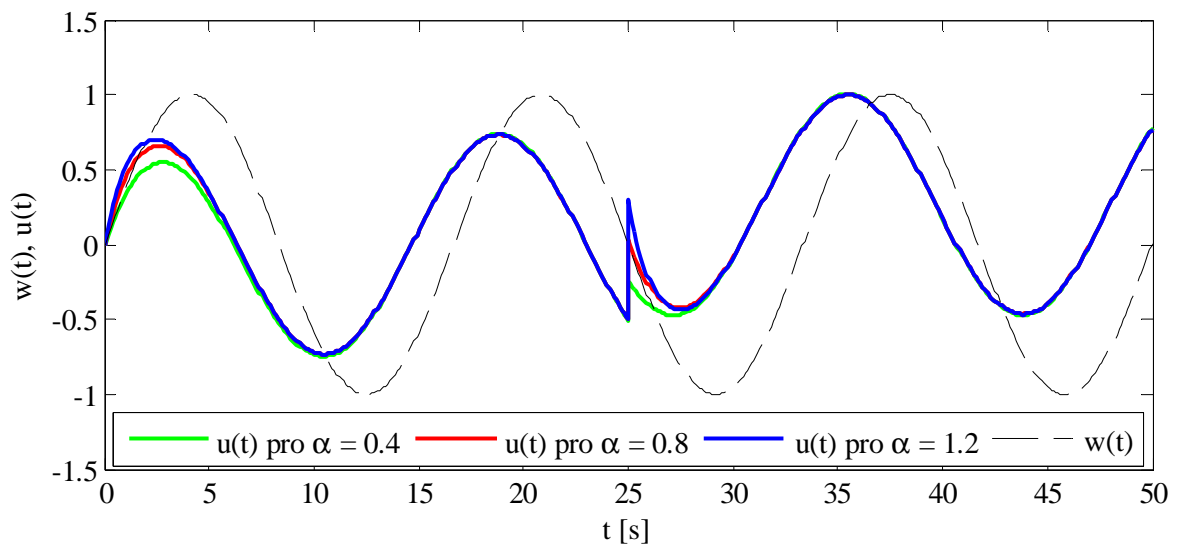
Tab. 6. Vypočítané parametry regulátoru $R(s)$ v konfiguraci 2DOF pro soustavu 4

α	r_0	r_1
0.4	0.02	1.07
0.8	0.24	1.60
1.2	0.45	2.13

4.4.4 Simulace 2DOF konfigurace



Obr. 30. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 2DOF pro různé α



Obr. 31. Akční zásahy v konfiguraci 2DOF pro různé α

Během této simulace byla zavedena skoková porucha v čase 25 s. Z výsledných regulačních pochodů (Obr. 30) vyplývá, že všechny regulované veličiny se ustálí na požadované hodnotě bez vzniku překmitů. Rychlost regulace je opět závislá na velikosti α . Čím vyšší je α , tím rychleji je dosažena žádaná hodnota a to platí i během působení poruchy. Z průběhů akčních veličin (Obr. 31) je opět zřejmé, že akční zásahy jsou pro větší hodnoty α agresivnější.

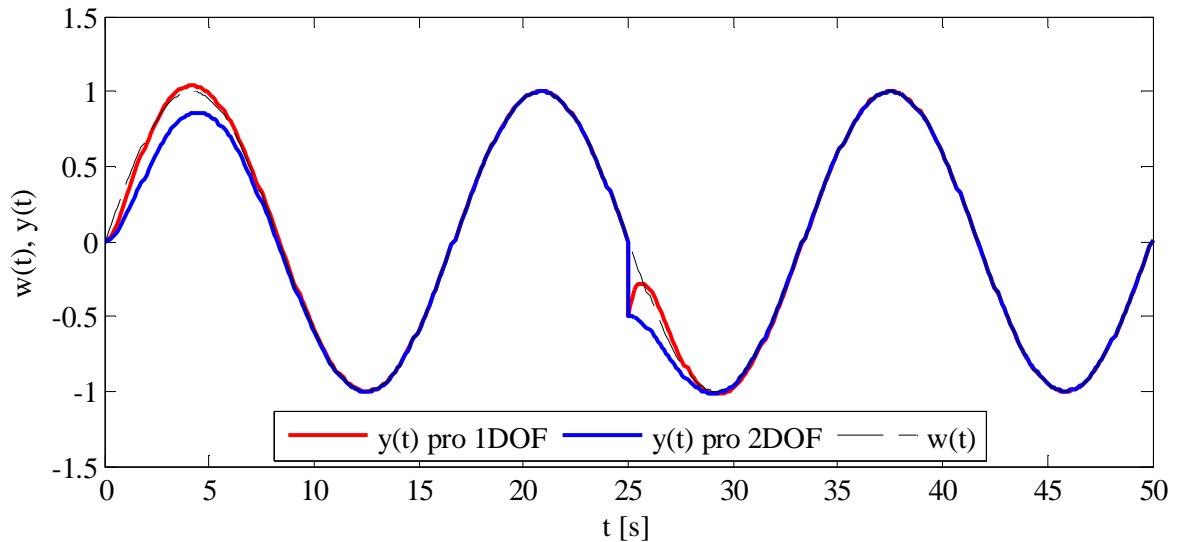
Hodnoty ISE pro jednotlivé α :

$$\alpha = 0.4 \Rightarrow ISE = 0.89$$

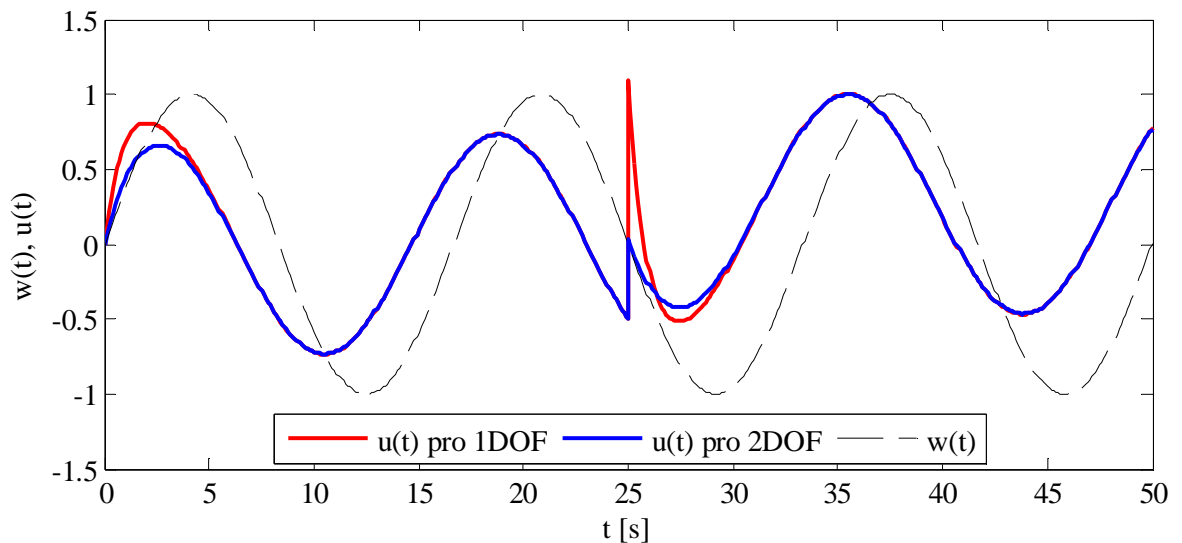
$$\alpha = 0.8 \Rightarrow ISE = 0.34$$

$$\alpha = 1.2 \Rightarrow ISE = 0.20$$

4.4.5 Porovnání 1DOF konfigurace s 2DOF konfigurací



Obr. 32. Porovnání průběhů regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF a 2DOF



Obr. 33. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF a 2DOF

Tato simulace byla provedena pro $\alpha = 0.8$ a skoková porucha byla simulována v čase 25 s. Z průběhu regulačního pochodu (Obr. 32) je zřejmé, že v konfiguraci 1DOF je žádaná veličina dosažena rychleji, ale vznikl překmit žádané hodnoty. Konfigurace 2DOF je tedy pomalejší, ale žádaná hodnota je dosažena bez vzniku překmitu. Dále lze vidět, že reakce na skokovou poruchu je v obou konfiguracích rozdílná. V konfiguraci 1DOF je kompenzace poruchy rychlejší, ale opět vzniká překmit, zato v konfiguraci 2DOF je žádaná hodnota

je dosažena povolna bez vzniku překmitu. Akční zásahy (Obr. 33) jsou v obou konfiguracích podobné, kromě počátku regulace a během působení poruchy. Zde akční zásahy konfigurace 1DOF dosahují o poznání vyšších hodnot.

ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce bylo prostudovat polynomiální metodu návrhu řízení po teoretické stránce a získané informace využít k návrhu regulátorů pro různé regulované soustavy. Pro každou regulovanou soustavu byly navrženy různě laděné regulátory volbou pólu α v konfiguraci 1DOF i v konfiguraci 2DOF. Získané regulační obvody byly simulovány v programu Matlab/Simulink.

Hodnocení kvality regulačního pochodu bylo provedeno především z vizuálního hlediska. Jakost regulace byla také vyjádřena pomocí integrálního kritéria kvadratické regulační plochy. Kritérium *ISE* však k porovnání kvality nebylo využito. Hodnota *ISE* je dána velikostí plochy, která je tvořena regulovanou veličinou a žádanou veličinou. Kde převážnou část této plochy tvoří plocha, které vznikne na počátku regulace, než regulovaná veličina dosáhne žádané hodnoty. Z toho vyplývá, že jeho hodnota je dána především rychlostí dosažení žádané hodnoty, ale jestli během regulace vzniknou nežádoucí překmity či podkmity žádané hodnoty, to z výsledné hodnoty *ISE* nepoznáme. Protože plocha tvořená těmito překmity a podkmity je často nepatrná. Z tohoto důvodu bylo upřednostněno vizuální porovnání regulačních pochodů.

U první soustavy, která byla určena jako stabilní prvního řádu s minimální fází, byl polynom $d(s)$ zvolen ve tvaru vícenásobného pólu α a ve tvaru součinu polynomu $a(s)$ a vícenásobného pólu α . Porovnáním takto vypočítaných regulátorů v konfiguraci 1DOF i 2DOF bylo zjištěno, že úprava polynomu $d(s)$ do tvaru (64) způsobí pomalejší dosažení žádané hodnoty, ale kvalita regulace v oblasti překmitů a podkmitů žádané hodnoty se zlepší. Z tohoto důvodu byl polynom $d(s)$ v ostatních soustavách volen ve tvaru (64) nebo (65).

Ze simulací regulačních obvodů vyplývá, že polynomiální metoda je vhodná pro všechny zvolené regulované soustavy, konkrétně pro stabilní systém 1. řádu s minimální fází, pro stabilní systém 2. řádu s neminimální fází a pro nestabilní systém 2. řádu s minimální fází. Dále bylo ověřeno, že polynomiální metoda je použitelná i v případě, kdy je žádaná veličina ve formě funkce sinus. Z výsledných simulací vyplývá, že v konfiguraci 1DOF je rychlost regulace vyšší, ale často dochází k překmitům nebo podkmitům žádané hodnoty. V konfiguraci 2DOF je žádaná hodnota dosažena pomaleji, ale kvalita regulace v oblasti kmitů je vyšší. Hodnoty akčních zásahů dosahují v konfiguraci 2DOF podstatně nižších hodnot. Rychlost regulace, velikost akčních zásahů a velikost překmitů i podkmitů žádané hodnoty také závisí na hodnotě α .

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] BALÁTĚ, Jaroslav. *Automatické řízení*. Praha: BEN - technická literatura, 2003. ISBN 80-7300-020-2.
- [2] NAVRÁTIL, Pavel. *Automatizace: Vybrané statě* [online]. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2011 [cit. 2014-02-02]. ISBN 978-80-7318-935-8. Dostupné z: <http://dspace.k.utb.cz/handle/10563/18581>
- [3] ŠULC, Bohumil a Miluše VÍTEČKOVÁ. *Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů*. Praha: ČVUT, 2004. ISBN 80-01-03007-5.
- [4] PROKOP, Roman, Radek MATUŠŮ a Zdenka PROKOPOVÁ. *Teorie automatického řízení - lineární spojitý dynamický systém*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2006. ISBN 80-7318-369-2.
- [5] HOFREITER, Milan. *Základy automatického řízení*. Praha: ČVUT, 2012. ISBN 978-80-01-05007-1.
- [6] DOSTÁL, Petr a Radek MATUŠŮ. *Stavová a algebraická teorie řízení* [online]. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2010 [cit. 2014-02-02]. ISBN 978-80-7318-991-4. Dostupné z: <http://dspace.k.utb.cz/handle/10563/18580>
- [7] Kvalita regulačního pochodu: Integrální kritéria kvality. *Řízení technologických procesů* [online]. [2007] [cit. 2014-06-06]. Dostupné z: <http://rtp.webzdarma.cz/rizeni09.php#kriteria>

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

(s)	Komplexní proměnná
(t)	Časová proměnná
1DOF	Konfigurace s jedním stupněm volnosti
2DOF	Konfigurace se dvěma stupni volnosti
A	Množina prvků systému
A_m	Amplituda
$b(s), a(s)$	Polynomy vyjadřující přenos akční veličiny
$c(s), a(s)$	Polynomy vyjadřující přenos poruchové veličiny
$d(s)$	Charakteristický polynom
deg	Stupeň polynomu
$e(t), E(s)$	Regulační odchylka a její obraz
$f(s)$	Nejmenší společný násobek jmenovatelů vstupních signálů
$G(s)$	Přenos akční veličiny
$G_v(s)$	Přenos poruchové veličiny
$h_v(s), f_v(s)$	Polynomy vyjadřující obraz poruchové veličiny
$h_w(s), f_w(s)$	Polynomy vyjadřující obraz žádané veličiny
ISE	Integrální kritérium kvadratické regulační plochy
$j\beta_i$	Imaginární část pólu uzavřeného regulačního obvodu
K	Množina výstupních veličin systému
k	Konstanta zaručující ryzost regulátoru v 2DOF konfiguraci
LCM	Nejmenší společný násobek
$n(s)$	Polynom v charakteristickém polynomu pro nestabilní regulované soustavy
$P-I-D$	Proporcionální-Integrační-Derivační složky regulátoru
PN	Počet neznámých

PR	Počet rovnic
\tilde{p}	Polynom obsažený v polynomu $p(s)$
Q	Množina vyjadřující vazby mezi vstupními a výstupními veličinami systému
$Q(s)$	Přenos zpětnovazebního regulátoru
$q(s), p(s)$	Polynomy vyjadřující přenos zpětnovazebního regulátoru
$R(s)$	Přenos přímovazebního regulátoru
$r(s), p(s)$	Polynomy vyjadřující přenos přímovazebního regulátoru
S	Množina reprezentující celkový systém
$SISO$	Jednorozměrový systém
$t(s)$	Pomocný polynom pro řešení polynomiální rovnice
$u(t), U(s)$	Akční veličina a její obraz
$v(t), V(s)$	Poruchová veličina a její obraz
v_0, w_0	Konstanty vstupních signálů
W	Množina vstupních veličin systému
$w(t), W(s)$	Žádaná veličina a její obraz
x_i	Póly uzavřeného regulačního obvodu
$y(t), Y(s)$	Regulovaná veličina a její obraz
α	Pól charakteristického polynomu
α_i	Reálná část pólů uzavřeného regulačního obvodu
ω	Úhlová frekvence

SEZNAM OBRÁZKŮ

<i>Obr. 1. Blokové schéma základního spojitého regulačního obvodu.....</i>	12
<i>Obr. 2. Blokové schéma konfigurace 1DOF.....</i>	17
<i>Obr. 3. Blokové schéma konfigurace 2DOF.....</i>	21
<i>Obr. 4. Simulační zapojení konfigurace 1DOF.....</i>	28
<i>Obr. 5. Simulační zapojení konfigurace 2DOF.....</i>	28
<i>Obr. 6. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF pro různé α.....</i>	30
<i>Obr. 7. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF pro různé α.....</i>	31
<i>Obr. 8. Porovnání průběhů regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF pro rozdílné metody volby polynomu $d(s)$.....</i>	32
<i>Obr. 9. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF pro rozdílné metody volby polynomu $d(s)$.....</i>	32
<i>Obr. 10. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 2DOF pro různé α.....</i>	34
<i>Obr. 11. Akční zásahy v konfiguraci 2DOF pro různé α.....</i>	35
<i>Obr. 12. Porovnání průběhů regulovaných veličin v konfiguraci 2DOF pro rozdílné metody volby polynomu $d(s)$.....</i>	36
<i>Obr. 13. Akční zásahy v konfiguraci 2DOF pro rozdílné metody volby polynomu $d(s)$.....</i>	36
<i>Obr. 14. Porovnání průběhů regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF a 2DOF.....</i>	37
<i>Obr. 15. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF a 2DOF.....</i>	37
<i>Obr. 16. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF pro různé α.....</i>	39
<i>Obr. 17. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF pro různé α.....</i>	40
<i>Obr. 18. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 2DOF pro různé α.....</i>	42
<i>Obr. 19. Akční zásahy v konfiguraci 2DOF pro různé α.....</i>	42
<i>Obr. 20. Porovnání průběhů regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF a 2DOF.....</i>	43
<i>Obr. 21. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF a 2DOF.....</i>	43
<i>Obr. 22. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF pro různé α.....</i>	46
<i>Obr. 23. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF pro různé α.....</i>	46
<i>Obr. 24. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 2DOF pro různé α.....</i>	48
<i>Obr. 25. Akční zásahy v konfiguraci 2DOF pro různé α.....</i>	48
<i>Obr. 26. Porovnání průběhů regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF a 2DOF.....</i>	49
<i>Obr. 27. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF a 2DOF.....</i>	49
<i>Obr. 28. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF pro různé α.....</i>	52
<i>Obr. 29. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF pro různé α.....</i>	52
<i>Obr. 30. Průběhy regulovaných veličin v konfiguraci 2DOF pro různé α.....</i>	55

<i>Obr. 31. Akční zásahy v konfiguraci 2DOF pro různé α</i>	<i>55</i>
<i>Obr. 32. Porovnání průběhů regulovaných veličin v konfiguraci 1DOF a 2DOF.....</i>	<i>56</i>
<i>Obr. 33. Akční zásahy v konfiguraci 1DOF a 2DOF</i>	<i>56</i>

SEZNAM TABULEK

<i>Tab. 1. Vypočítané parametry regulátoru v konfiguraci 1DOF pro soustavu 1</i>	<i>30</i>
<i>Tab. 2. Vypočítané parametry regulátoru v konfiguraci 1DOF pro soustavu 2</i>	<i>39</i>
<i>Tab. 3. Vypočítané parametry regulátoru v konfiguraci 1DOF pro soustavu 3</i>	<i>45</i>
<i>Tab. 4. Vypočítané parametry regulátoru v konfiguraci 1DOF pro soustavu 4</i>	<i>51</i>
<i>Tab. 5. Vypočítané parametry regulátoru $Q(s)$ v konfiguraci 2DOF pro soustavu 4</i>	<i>54</i>
<i>Tab. 6. Vypočítané parametry regulátoru $R(s)$ v konfiguraci 2DOF pro soustavu 4.....</i>	<i>54</i>

SEZNAM PŘÍLOH

P I Vztahy určující parametry zpětnovazebního regulátoru pro regulovanou soustavu 3

**PŘÍLOHA P I: VZTAHY URČUJÍCÍ PARAMETRY
ZPĚTNOVAZEBNÍHO REGULÁTORU PRO REGULOVANOU
SOUSTAVU 3**

$$q_0 = \frac{n_0 \alpha^2}{b_0}$$

$$q_1 = \frac{(a_1 b_1 - a_2 b_0)(b_1 q_0 - 2n_0 \alpha - n_1 \alpha^2) + a_0 b_0 (a_1 p_1 - n_1 - 2n_2 \alpha)}{a_0 b_1^2 - b_0 (a_1 b_1 - a_2 b_0)}$$

$$- \frac{a_0 b_1 (a_0 p_1 - n_0 - 2n_1 \alpha - n_2 \alpha^2)}{a_0 b_1^2 - b_0 (a_1 b_1 - a_2 b_0)}$$

$$q_2 = \frac{a_2 b_0 n_0 - a_1 b_0 n_1 + a_0 b_1 n_1 + a_1^2 b_0 p_1 - a_0 a_2 b_0 p_1 - a_0 a_1 b_1 p_1 + a_2 b_1^2 q_0}{a_2 b_0^2 - a_1 b_0 b_1 + a_0 b_1^2}$$

$$+ \frac{2a_2 b_0 n_1 \alpha - 2a_2 b_1 n_0 \alpha - 2a_1 b_0 n_2 \alpha + 2a_0 b_1 n_2 \alpha - a_2 b_1 n_1 \alpha^2 + a_2 b_0 n_2 \alpha^2}{a_2 b_0^2 - a_1 b_0 b_1 + a_0 b_1^2}$$

$$p_0 = \frac{b_0^2 n_1 - b_0 b_1 n_0 - a_1 b_0^2 p_1 + a_0 b_0 b_1 p_1 - b_1^3 q_0 + 2b_1^2 n_0 \alpha - 2b_0 b_1 n_1 \alpha}{a_2 b_0^2 - a_1 b_0 b_1 + a_0 b_1^2}$$

$$+ \frac{2b_0^2 n_2 \alpha + b_1^2 n_1 \alpha^2 - b_0 b_1 n_2 \alpha^2}{a_2 b_0^2 - a_1 b_0 b_1 + a_0 b_1^2}$$

$$p_1 = \frac{n_2}{a_2}$$