

Spojité řízení pohybu robotického ramena se třemi stupni volnosti
Continuous motion control design of robotic manipulator with three degrees of freedom

Mgr. Pavel Hrnčířík

Bakalářská práce
2019



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2018/2019

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Mgr. Pavel Hrnčířik**
Osobní číslo: **A16092**
Studijní program: **B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Inteligentní systémy s roboty**
Forma studia: **kombinovaná**

Téma práce: **Spojité řízení pohybu robotického ramena se třemi stupni volnosti**

Téma anglicky: **A Continuous Motion Control Design of Robotic Manipulator with Three Degrees of Freedom**

Zásady pro vypracování:

1. Zavedte souřadné systémy podle DH a proveďte úplný kinematický popis systému.
2. Odvoďte pohybové rovnice se zvoleným břemenem zátěže.
3. Vytvořte dynamický simulační model uvedeného uspořádání.
4. Na vytvořeném dynamickém modelu experimentálně ověřte možnost řízení pohybu pomocí autonomního řízení kloubů.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. Úředníček, Z.: Robotika, skripta UTB ve Zlíně, Zlín 2012, 978-80-7454-223-7
2. Siciliano, B., Khatib, O.: Springer Handbook of Robotics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008, ISBN: 978-3-540-23957-4, e-ISBN: 978-3-540-30301-5
3. Jazar, R. N.: Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics, and Control, Springer Science + Business Media, LLC, New York, 2007, ISBN-13:978-0-387-32475-3
4. Critchlow, A. J. Introduction to Robotics. New York : Macmillan, 1985. ISBN 0023255900
5. Siciliano B, Sciavicco L, Villani L, Oriolo G (2009) Robotics: Modelling, planning and control. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg

Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Ing. Zdeněk Úředníček, CSc.**
Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání bakalářské práce: **21. prosince 2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **15. května 2019**

Ve Zlíně dne 21. prosince 2018

doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

Jméno, příjmení: Pavel Hrnčířík

Název bakalářské práce:

Spojité řízení pohybu robotického ramena se třemi stupni volnosti

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen přípouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne

.....
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Cílem této bakalářské práce bylo vytvoření kompletního popisu kinematiky existujícího robotického ramena se 3 stupni volnosti. Dalším cílem bylo pomocí tohoto popisu odvodit pohybové rovnice se zvoleným břemenem zátěže. Následovalo vytvoření dynamického modelu uvedeného uspořádání a na tomto modelu byla experimentálně ověřena možnost řízení pohybu pomocí autonomního řízení kloubů. Správnost výpočtu kinematického a dynamického modelu byla ověřena simulací v prostředí SolidWorks a Dynast.

Klíčová slova:

Kinematika, Denavit-Hartenberg, dynamika, pohybové rovnice, robot, SolidWorks, Dynast

ABSTRACT

The aim of my bachelor thesis was to create a complete description of the kinematics of an existing robotic arm with 3 degrees of freedom. Using this description, deduce motion equations with the selected load burden. Then create a dynamic model of this layout and experimentally verify the motion control capability with autonomous joints control on this model.

Verify the accuracy of the kinematic and dynamic model calculation by simulation in SolidWorks and Dynast.

Keywords:

Kinematics, Denavit-Hartenberg, Dynamics, Motion Equations, Robot, Solidworks, Dynast

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu své bakalářské práce doc. RNDr. Ing. Zdeňku Úředníčkovi, CSc. za trpělivost, čas strávený při konzultacích a poskytnutí materiálů, týkajících se tématu této práce. Velký dík za trpělivost a pochopení patří i mé ženě Zuzaně.

Prohlašuji, že odevzdaná verze bakalářské/diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

OBSAH

ÚVOD	8
I TEORETICKÁ ČÁST	10
1 KINEMATIKA	11
1.1 ZÁKLADNÍ ÚLOHY KINEMATIKY	12
1.2 PRAVOTOČIVÁ SOUSTAVA SOUŘADNIC	13
1.3 ZAVEDENÍ SOUŘADNÝCH SYSTÉMŮ PODLE DENAVIT - HARTENBERGA	13
1.4 DENAVIT-HARTENBERGOVA SYMBOLIKA	14
1.5 TRANSFORMAČNÍ MATICE	16
1.6 POLOHA HMOTY KLDKY A POHONU NA KONCI RAMENE.....	16
1.7 INVERZNÍ KINEMATICKÁ ÚLOHA.....	19
1.8 PRACOVNÍ OBLAST ROBOTA	21
2 DYNAMIKA	22
2.1 NEWTONOVY POHYBOVÉ ZÁKONY.....	22
2.2 LAGRANGEOVY ROVNICE	23
2.3 KINETICKÁ ENERGIE.....	24
2.4 POTENCIÁLNÍ ENERGIE	29
2.5 POHYBOVÉ ROVNICE	30
2.6 Maticová forma pohybových rovnic	32
II PRAKTICKÁ ČÁST	34
3 SOLIDWORKS - 3D CAD	35
3.1 POPIS SOLIDWORKSU – ÚVODNÍ MENU	35
3.2 SESTAVENÍ FUNKČNÍHO MODELU A OVĚŘENÍ POHYBLIVOSTI.....	36
4 DYNAST	37
4.1 POPIS DYNASTU – ÚVODNÍ MENU	37
4.2 SESTAVENÍ FUNKČNÍHO MODELU	38
4.3 POUŽITÁ REGULACE	41
4.4 ZÁVĚR.....	43
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	44
SEZNAM POUŽITÝCH ELEKTRONICKÝCH ZDROJŮ	45
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	46
SEZNAM OBRÁZKŮ	47
SEZNAM TABULEK	48
SEZNAM PŘÍLOH	49
PŘÍLOHA P I: VÝPIS PROGRAMU ROBOTICKÉHO RAMENE V PROGRAMU DYNAST	50
PŘÍLOHA P II: VÝPIS NĚKTERÝCH VÝPOČTŮ Z PROGRAMU MAXIMA	54
PŘÍLOHA P III: OBECNÉ ŘEŠENÍ INVERZNÍ ÚLOHY PRO VÍCE STUPŇŮ VOLNOSTI	56
PŘÍLOHA P IV: VÝPIS PROGRAMU ROBOTICKÉHO RAMENE V PROGRAMU DYNAST	59

ÚVOD

Společnost se obecně posouvá od informační společnosti ke společnosti vědění a od společnosti vědění ke společnosti „všudypřítomného vědění“. Ve společnosti všudypřítomného vědění bude úloha, kterou mají hrát inteligentní a autonomní stroje, představovat klíčovou otázku pro tvůrce politik. Mechatronika většinu z těchto problémů řeší pomocí kombinace mechaniky, elektroniky a softwarového inženýrství.

Mechatronika studuje:

- kinematiku ideálně tuhých těles vázaných kinematickými dvojicemi v prostoru (přímá a inverzní kinematická úloha),
- dynamické chování ideálně tuhých těles vázaných kinematickými dvojicemi v prostoru (přímá a inverzní dynamická úloha),
- analýzu a návrh elektromechanických akčních členů a jejich řízení,
- zákony řízení pohybu pro tyto systémy, vestavěné distribuované řídicí systémy reálného času,
- využití principů umělé inteligence pro orientaci a plnění zadaných úloh autonomních systémů s řízením pohybu v 3D prostoru.
- analýzu a návrh pro vnitřní a vnější senzorické systémy včetně signal processingu.

Při analýze (studiu činnosti) a následné syntéze (návrhu nových částí) technických systémů (např. řízení pohybu mechanických soustav pomocí elektrických nebo elektrohydraulických pohonů) jsme nuceni pracovat se systémy s nezanedbatelnou interakcí různých nosičů energie (elektromagnetické pole, tuhá nebo pružná mechanická tělesa, kapalina, plyn).

Jednou ze součástí mechatroniky je robotika.

A právě robotikou se zabývá strategie EU Robotika 2020 a nastiňuje současný vývoj takto: *„Technologie robotiky bude hrát v nadcházejícím desetiletí prim. Bude ovlivňovat každý aspekt práce a domova. Robotika má potenciál transformovat životy a pracovní postupy, zvyšovat úroveň efektivity, bezpečnosti a poskytovaných služeb a vytvářet pracovní místa. Její vliv bude postupem času růst stejně jako interakce mezi roboty a lidmi“* (The future of work: robotics).

Stejně jako nyní budou ve světě všudypřítomných technologií lidé komunikovat mezi sebou (člověk - člověk) a stroje budou komunikovat s lidmi (člověk - stroj), avšak stroje (včetně robotů) budou také komunikovat mezi sebou (stroj - stroj). Očekává se, že počet zařízení zapojených do komunikace stroj - stroj bude exponenciálně růst a že do roku 2020 počet „inteligentních předmětů“ schopných vzájemně komunikovat a spolupracovat s lidmi dosáhne přibližně 50 milionů a to přesně zapadá do moderních konceptů informační společnosti, jako jsou Průmysl 4.0 (Industry 4.0) nebo Internet věcí (Internet of Things).

Cílem této bakalářské práce je na zadaném robotickém rameni:

- vyřešit základní kinematické úkoly (přímou a inverzní kinematickou úlohu);
- s pomocí takto vyřešených úloh sestavit pohybové rovnice pro jednotlivé články;
- zobrazit robotickou paži v 3D programech Geogebra a SolidWorks;
- správnost výpočtu kinematického modelu a dynamických rovnic ověřit simulací v prostředí Dynast;
- na základě modelu v programu Dynast navrhnout jednoduché regulace pro motory v kloubech robotické struktury.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 KINEMATIKA

Kinematika je část mechaniky, která se zabývá klasifikací a popisem různých druhů pohybu, ale nezabývá se jeho příčinami. Kinematika se tedy zaměřuje na geometrické sledování pohybu v robotice.

Pohybem budeme rozumět jakoukoliv změnu polohy nebo orientace tělesa. Pro popis pohybu můžeme používat tyto fyzikální veličiny (Halliday, Resnick, Walker, 2013): dráhu, rychlost, zrychlení a ryv (jerk).

Dráha je definována jako délka trajektorie, kterou hmotný bod opíše za určitou dobu (fyzikální vektorová veličina, značka s , jednotka metr-m).

Rychlost je charakteristika pohybu, která určuje, jakým způsobem se mění poloha tělesa (hmotného bodu) v čase (fyzikální vektorová veličina, značka v , derivace dráhy podle času, jednotka $\frac{m}{s}$).

Zrychlení jako charakteristika pohybu určuje, jakým způsobem se mění rychlost tělesa (hmotného bodu) v čase (fyzikální vektorová veličina, značka a , derivace rychlosti podle času, druhá derivace dráhy podle času jednotka $\frac{m}{s^2}$).

Ryv (jerk) udává, jakým způsobem se mění zrychlení tělesa (hmotného bodu) v čase (fyzikální vektorová veličina, značka j , derivace zrychlení podle času, jednotka $\frac{m}{s^3}$).

Polohování je přenesení koncového efektoru do libovolného bodu v pohotovostním prostoru, zatímco orientace je pohyb koncového efektoru do požadované orientace v dané poloze. Polohování je úloha ramene (manipulátoru) a orientace je úlohou zápěstí. Kvůli zjednodušení kinematické analýzy můžeme oddělit polohování od orientace koncového efektoru.

„Pokud jde o uspořádání v kinematickém smyslu, 6DOF (stupňů volnosti) robota obsahuje šest postupných pohyblivých článků a 6 kloubů, kde u nejméně dvou posledních článků je nulová délka článku. Obecně je téměř každý kinematický problém interpretovatelný jako sčítání vektorů. Nicméně, každý vektor ve vektorové rovnici musí být transformovaný a vyjádřený v společné souřadnicové soustavě” (Úředníček, 2012, str. 26).

1.1 Základní úlohy kinematiky

Kinematika v robotice řeší tyto základní úlohy:

Přímá kinematická úloha nastává tehdy, jsou-li známá kinematická data pro kloubové souřadnice a jsou použita pro nalezení souřadnic v základní soustavě souřadnic.

Inverzní kinematická úloha nastává tehdy, jsou-li známá kinematická data pro koncový efektor v kartézské souřadné soustavě a máme nalézt kinematická data pro kloubové souřadnice.

„Inverzní kinematická úloha je většinou nelineární a obyčejně mnohem komplikovanější problém než přímý kinematický problém. Jestliže byl problém inverzní polohy vyřešen, inverzní rychlost a zrychlení jsou lineární a mnohem jednodušší. Říká se, že iterativní poloha má uzavřenou formu, není-li iterativní“ (Úředníček, 2012, str. 26).

Souřadnicový systém a souřadnice

V robotice každému článku robota a každému objektu okolí robota přiřazujeme jednu nebo více souřadných soustav. Komunikace mezi souřadnými soustavami (nazývaná transformace referenčních systémů) je při modelování a programování robotů základní pojem.

Rotace tuhého tělesa může být popsána jedním z více způsobů. Nejznámější jsou:

- Množina rotací v globálně pevném pravotočivém kartézském souřadném systému.
- Množina rotací v pohyblivém pravotočivém kartézském souřadném systému.
- Úhlové otáčení okolo pevné osy v prostoru.

Pevný (globální) referenční systém je nepohyblivý souřadnicový systém spojený s rámem. Tedy pohyb robota se uskutečňuje v pevném referenčním systému nazvaném globální referenční systém.

Pohyblivý referenční systém je referenční systém nazvaný lokální (tělesový) referenční systém a je pevně spojen s daným tuhým tělesem.

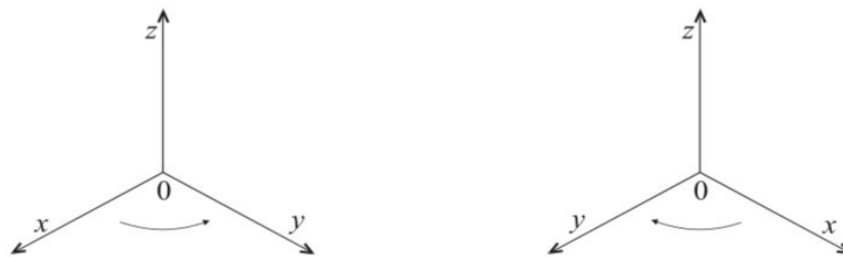
Poloha a orientace článku vzhledem k rámu je popsána jako poloha a orientace jeho lokálního referenčního systému v globálním referenčním systému.

Při analýze robota umístíme globální referenční systém na rám a spojíme lokální referenční systém s každým jednotlivým článkem. Nejčastěji používaný je v robotice kartézský souřadnicový systém, ale používají se i cylindrický (válcový), sférický, angulární a další.

1.2 Pravotočivá soustava souřadnic

V (třírozměrném) eukleidovském prostoru tvoří kartézskou soustavu souřadnic tři navzájem kolmé osy. Souřadnice bodu jsou jeho vzdálenosti od tří rovin, které se protínají v osách x , y , z . Podle toho, v jakém pořadí se osy uvádějí, se někdy rozlišuje pravotočivá a levotočivá soustava souřadnic. Osa x necht' směřuje přímo vpřed, osa y necht' směřuje vlevo a osa z necht' směřuje vzhůru. Taková soustava se nazývá pravotočivá souřadná soustava. Zaměníme-li osy x a y , získáme souřadnou soustavu levotočivou.

Obrázek 1 Zobrazení pravotočivé a levotočivé souřadné soustavy

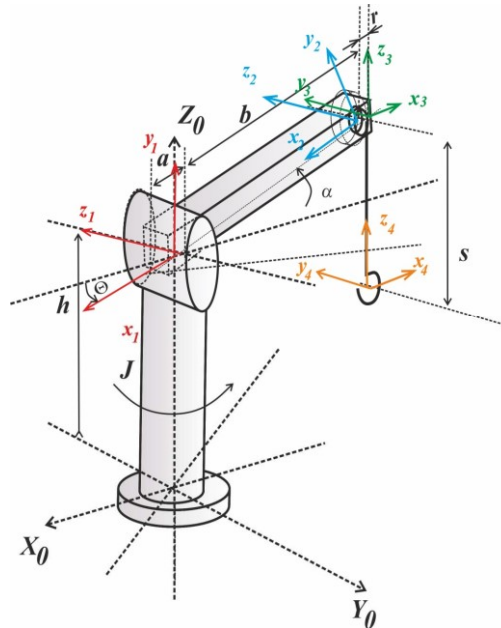


Zdroj: vlastní tvorba

1.3 Zavedení souřadných systémů podle Denavit - Hartenberga

Nejvíce rozšířenou metodou používanou při zavedení souřadných soustav v kinematice sériových robotů je metoda založena na Denavit - Hartenbergově (DH) notaci pro definování souřadných soustav prostorového mechanismu a vytvoření homogenních transformací bodů. Pro reprezentaci prostorových transformací polohového vektoru bodu je použita matice 4×4 nebo homogenní transformace. Metoda transformační matice je nejčastěji používanou technikou pro kinematický popis pohybu robota. Následující obrázek ukazuje zadané kinematické uspořádání robota a souřadné soustavy zavedené k jednotlivým tělesům ve shodě s tzv. DH pravidly

Obrázek 2 Kinematické uspořádání robota a souřadné soustavy



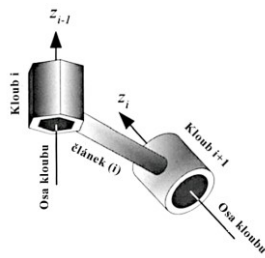
Zdroj: vlastní tvorba

Výzkumníci v kinematice robota zkusili i alternativní metody reprezentace transformací tuhého tělesa založené na matematických či fyzikálních konceptech. Takové jsou Šroubová teorie, Lie-ova algebra, Y-algebra. I když Šroubová teorie a Lie-ova algebra mohou být úspěšně použity pro analýzu robota, stejně jejich výsledek by měl být nakonec vyjádřený maticově.

1.4 Denavit-Hartenbergova symbolika

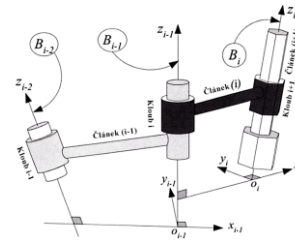
Sériový robot s n klouby má $n+1$ článků. Očíslujme články počínajíc (0) pro nepohyblivý základní, se zemí spojený článek a postupně až po (n) pro článek koncového efektoru. Očíslujme klouby počínajíc 1 pro kloub spojující první pohyblivý článek s nepohyblivým základním, se zemí spojeným článkem a postupně až po n . Tedy článek (i) je spojen s předchozím článkem blíže základnímu (i-1) prostřednictvím kloubu i a s následujícím blíže k efektoru kloubem i+1

Obrázek 3 Efektor s kloubem. 3



Zdroj: Úředníček, 2018, online

Obrázek 4 Sériový robot s klouby



Zdroj: Úředníček, 2018, online

Denavid - Hartenbergova symbolika (notace):

- Osa z_i je spojena s osou $i + 1$ kloubu.
- Osa x_i je definována podél společné normály os z_{i-1} a z_i směřuje od z_{i-1} k z_i .
- Osa y_i je definována pomocí vektorového součinu. $y_i = \frac{z_i \otimes x_i}{|z_i \otimes x_i|}$.

Délka článku a_i je vzdálenost mezi osami z_{i-1} a z_i podél osy x_i . Délku článku a_i nazýváme kinematická délka článku (i).

Zkroucení článku α_i je rotace osy z_{i-1} okolo osy x_i , aby se stala paralelní s osou z_i .

Vzdálenost kloubu d_i je vzdálenost mezi osami x_{i-1} a x_i podél osy z_{i-1} . Vzdálenost kloubu je někdy nazývaná offset článku.

Úhel článku Θ_i je požadované otočení osy x_{i-1} okolo z_{i-1} , aby se stala paralelní s osou x_i .

Tyto parametry určují jednoznačně transformační matici mezi souřadnými soustavami i a $i-1$. Pro náš případ jsou parametry DH notace uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1 DH notace

parametr číslo čl.	a_i	α_i	d_i	Θ_i
1	$z_0 \rightarrow z_1$ podél $x_1 \Rightarrow 0$	$z_0 \rightarrow z_1$ okolo $x_1 \Rightarrow 90^\circ$	$x_0 \rightarrow x_1$ podél $z_0 \Rightarrow h$	$x_0 \rightarrow x_1$ okolo $z_0 \Rightarrow \Theta$
2	$z_1 \rightarrow z_2$ podél $x_2 \Rightarrow -b$	$z_1 \rightarrow z_2$ okolo $x_2 \Rightarrow 0^\circ$	$x_1 \rightarrow x_2$ podél $z_1 \Rightarrow 0$	$x_1 \rightarrow x_2$ okolo $z_1 \Rightarrow -\alpha$
3	$z_2 \rightarrow z_3$ podél $x_3 \Rightarrow r$	$z_2 \rightarrow z_3$ okolo $x_3 \Rightarrow 90^\circ$	$x_2 \rightarrow x_3$ podél $z_2 \Rightarrow 0$	$x_2 \rightarrow x_3$ okolo $z_2 \Rightarrow 180 + \alpha$
4	$z_3 \rightarrow z_4$ podél $x_4 \Rightarrow 0$	$z_3 \rightarrow z_4$ okolo $x_4 \Rightarrow 0^\circ$	$x_3 \rightarrow x_4$ podél $z_3 \Rightarrow -s$	$x_3 \rightarrow x_4$ okolo $z_3 \Rightarrow 0$

Zdroj: vlastní tvorba

Uřídíme transformační homogenní kinematické transformační matice pro přepočít souřadnic libovolného bodu v s.s. i do s.s. $i-1$:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zdroj: Úředníček, 2018, výukové materiály

1.5 Transformační matice

Pro vytvoření transformační matice vycházíme ze dvou shodných souřadných systémů A_{i-1} a A_i . Následně provedeme takové pohyby, které soustavu A_i překryjí se soustavou A_{i-1} . Soustava A_{i-1} slouží jako globální soustava a všechny tyto pohyby a rotace se provádějí kolem A_i podle globálních os.

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\cos(\frac{\pi}{2})\sin(\theta) & \sin(\frac{\pi}{2})\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\frac{\pi}{2})\cos(\theta) & -\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\cos(0)\sin(-\alpha) & \sin(0)\sin(-\alpha) & -b\cos(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(0)\cos(-\alpha) & -\sin(0)\cos(-\alpha) & -b\sin(-\alpha) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & -b\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & b\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.6 Poloha hmoty kladky a pohonu na konci ramene

Poloha hmoty kladky a pohonu na konci ramene v souřadné soustavě $Ox_2y_2z_2$ je

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Absolutní poloha hmoty kladky a pohonu na konci ramene je

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{kl} \\ y_{kl} \\ z_{kl} \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\alpha) & \cos(\theta)\sin(\alpha) & \sin(\theta) & -b\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ \sin(\theta)\cos(\alpha) & \sin(\theta)\sin(\alpha) & -\cos(\theta) & -b\sin(\theta)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & h + b\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -b\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ -b\sin(\theta)\cos(\alpha) \\ h + b\sin(\alpha) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^2T_3 &= \begin{bmatrix} \cos(\pi + \alpha) & -\cos(\pi + \alpha)\sin(\frac{\pi}{2}) & \sin(\pi + \alpha)\sin(\frac{\pi}{2}) & r\cos(\alpha) \\ \sin(\pi + \alpha) & \cos(\pi + \alpha)\cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\pi + \alpha)\cos(\frac{\pi}{2}) & -r\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & r\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & 0 & 0 & -r\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\cos(0)\sin(0) & \sin(0)\sin(0) & 0 \\ \sin(0) & \cos(0)\cos(0) & -\sin(0)\cos(0) & -r\sin(0) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & -s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformace ${}^0T_2 =$

$$\begin{aligned} {}^0T_1 * {}^1T_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) & -b\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & b\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\alpha) & \cos(\theta)\sin(\alpha) & \sin(\theta) & -b\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ \sin(\theta)\cos(\alpha) & \sin(\theta)\sin(\alpha) & -\cos(\theta) & -b\sin(\theta)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & h + b\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transformace ${}^0T_3 = {}^0T_1 * {}^1T_2 * {}^2T_3 =$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\alpha) & \cos(\theta)\sin(\alpha) & \sin(\theta) & -b\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ \sin(\theta)\cos(\alpha) & \sin(\theta)\sin(\alpha) & -\cos(\theta) & -b\sin(\theta)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & h + b\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) & -r\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & -r\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & -r\cos(\theta) - b\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & -r\sin(\theta) - b\sin(\theta)\cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & h + b\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformace ${}^0T_4 = {}^0T_1 * {}^1T_2 * {}^2T_3 * {}^3T_4 =$

$$\begin{bmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & -r\cos(\theta) - b\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & -r\sin(\theta) - b\sin(\theta)\cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & h + b\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & -r\cos(\theta) - b\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & -r\sin(\theta) - b\sin(\theta)\cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & h + b\sin(\alpha) - s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

po úpravách vzorců $\cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta - \alpha) = (\cos(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\theta)\sin(\alpha)) + ((\cos(\theta)\cos(\alpha) + \sin(\theta)\sin(\alpha)) = 2 \cos(\theta)\cos(\alpha)$

po úpravách vzorců $\sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta - \alpha) = (\sin(\theta)\cos(\alpha) + \cos(\theta)\sin(\alpha)) + ((\sin(\theta)\cos(\alpha) - \cos(\theta)\sin(\alpha)) = 2 \sin(\theta)\cos(\alpha)$

$$= \begin{bmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & -\frac{1}{2}(2 b\cos(\theta)\cos(\alpha) - 2 r\cos(\theta)) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & -\frac{1}{2}(2 r\sin(\theta) + 2 b\sin(\theta)\cos(\alpha)) \\ 0 & 0 & 1 & h + b\sin(\alpha) - s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & -\frac{1}{2}((b(\cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta - \alpha)) + 2r\cos(\theta))) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & -\frac{1}{2}((b(\sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta - \alpha)) + 2r\cos(\theta))) \\ 0 & 0 & 1 & h + b\sin(\alpha) - s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & -\frac{1}{2}((b(\cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta - \alpha)) + 2r\cos(\theta))) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & -\frac{1}{2}((b(\sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta - \alpha)) + 2r\cos(\theta))) \\ 0 & 0 & 1 & h + b\sin(\alpha) - s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\cos(\theta) - b\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ -r\sin(\theta) - b\sin(\theta)\cos(\alpha) \\ h + b\sin(\alpha) - s \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pomocí těchto homogenních matic jsme schopni určit globální homogenní souřadnice (index G) libovolného bodu P i-tého tělesa (index B) mechanické struktury zadaného robota pomocí rovnice

$$\begin{bmatrix} {}^G X_P \\ {}^G Y_P \\ {}^G Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = {}^G T_1 \cdot {}^1 T_2 \cdot \dots \cdot {}^{i-1} T_i \cdot \begin{bmatrix} {}^B X_P \\ {}^B Y_P \\ {}^B Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.7 Inverzní kinematická úloha

Je metoda nebo proces využívaný v oblasti mechatroniky. V případě, že je známa poloha manipulátoru na konci robotického ramena a je zadána nová požadovaná poloha, je třeba pohnout různými klouby v robotickém rameni. Princip inverzní kinematické úlohy je dopočítání úhlu natočení jednotlivých kloubů ze stávající polohy a následné dopočítání, jak musí být klouby natočeny v požadované pozici.

Inverzní kinematická úloha:

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \cdot (b \cdot \cos \alpha + r) \\ -\sin \theta \cdot (b \cdot \cos \alpha + r) \\ h + b \cdot \sin \alpha - s \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Rovnice umocníme na druhou a sečteme

$$\begin{aligned} x_M^2 + y_M^2 &= \cos^2 \theta \cdot (b \cdot \cos \alpha + r)^2 + \sin^2 \theta \cdot (b \cdot \cos \alpha + r)^2 = (b \cdot \cos \alpha + r)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow b \cdot \cos \alpha + r &= \pm \sqrt{x_M^2 + y_M^2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\pm \sqrt{x_M^2 + y_M^2} - r}{b} \end{aligned}$$

a pomocí vzorce $\sin(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \cos(\alpha)^2}$;

$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\pm \sqrt{x_M^2 + y_M^2} - r}{b} \right)^2} = \pm \sqrt{1 - \left[\frac{x_M^2 + y_M^2 \mp 2 \cdot r \cdot \sqrt{x_M^2 + y_M^2} + r^2}{b^2} \right]}$$

$$\cos \theta = -\frac{x_M}{(b \cdot \cos \alpha + r)} = \mp \frac{x_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}; \sin \theta = -\frac{y_M}{(b \cdot \cos \alpha + r)} = \mp \frac{y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}$$

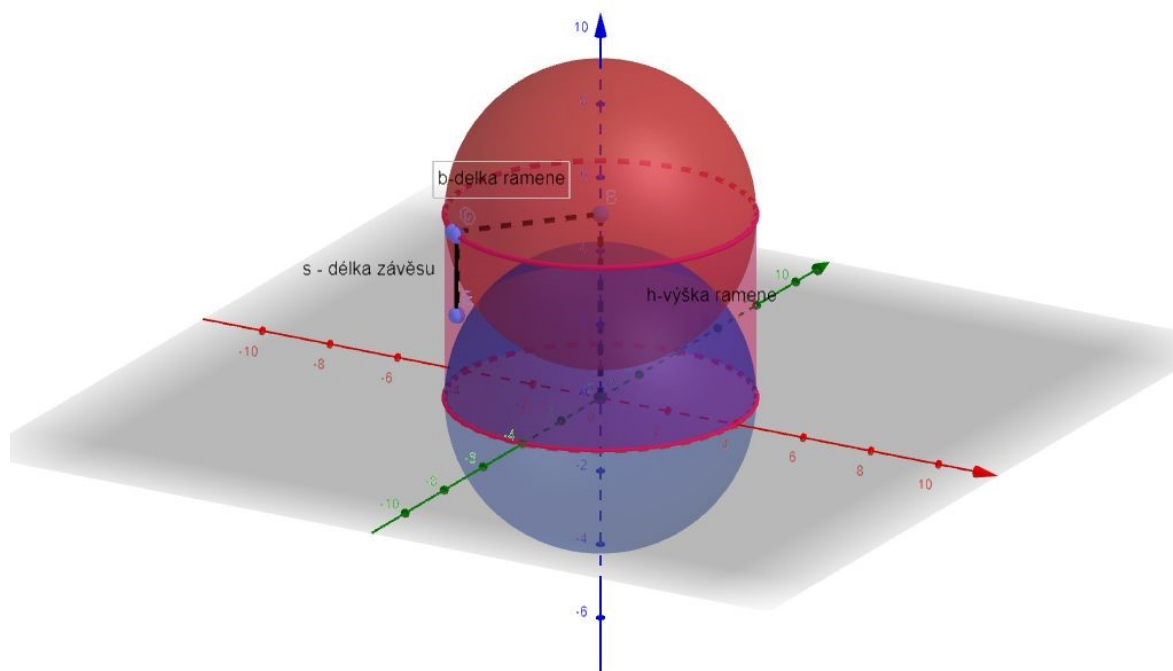
$$h + b \cdot \sin \alpha - s = z_M \Rightarrow s = h + b \cdot \sin \alpha$$

Obecné řešení pro více stupňů volnosti viz příloha PIII.

1.8 Pracovní oblast robota

Provedl jsem simulaci pro různé hodnoty s a h v programu 3D-Geogebra:

Obrázek 5 Pracovní oblast robota



Zdroj: vlastní tvorba

2 DYNAMIKA

Dynamika je část mechaniky, která se zabývá studiem systémů, které jsou podrobeny změnám stavu v čase. V mechanických systémech jako jsou roboty, změny stavu zahrnují pohyb. Hlavním krokem pro dynamickou analýzu systému je odvození pohybových rovnic systému, protože pohybové rovnice jsou podstatné pro návrh, analýzu a řízení systému. Dynamické pohybové rovnice popisují dynamické chování. Mohou být použity pro počítačovou simulaci pohybu robota, návrh vhodných zákonů řízení a vyhodnocení dynamické výkonnosti návrhu. Podobně jako v kinematice, problém dynamiky robota lze dělit na přímý a inverzní dynamický problém. V přímém dynamickém problému bychom měli určit pohyb robota při daných počátečních podmínkách a momentech (obecných silách) v aktivních kloubech.

V inverzním dynamickém problému bychom měli vypočítat síly a momenty potřebné pro generování požadované trajektorie pro danou množinu poloh, rychlostí a zrychlení. Problém řízení pohybu robota lze charakterizovat jako požadovaný pohyb koncového efektoru. Požadovaný pohyb je specifikován jako trajektorie v kartézské soustavě souřadnic, zatímco řídicí systém vyžaduje požadované hodnoty v kloubových souřadnicích.

„Senzory pohybových stavů generují data určující aktuální stav robota v prostoru kloubů. To vyvolává požadavek vyjádření kinematických proměnných z kartézské soustavy souřadnic do odpovídajících kloubových souřadnic. Tyto transformace jsou závislé na geometrii kinematiky manipulátoru. Tedy řízení pohybu robota obsahuje tři výpočtové problémy”

- *Určení požadované trajektorie v kartézském souřadnicovém systému.*
- *Transformace kartézské trajektorie do odpovídajících kloubových souřadnic.*
- *Generování zobecněných sil pro uskutečnění pohybu po žádané trajektorii.*

(Úředníček, 2012, str. 26).

2.1 Newtonovy pohybové zákony

Newtonovy pohybové zákony jsou fyzikální zákony formulované Isaacem Newtonem. Popisují vztah mezi pohybem tělesa a silami, které na toto těleso působí.

První pohybový zákon – zákon setrvačnosti

Každé těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není přinuceno tento stav změnit působením jiné síly. První zákon platí v inerciálních

soustavách, a systémy v nichž neplatí, nazýváme neinerciální.

Druhý pohybový zákon – zákon síly

Translační zrychlení pohybu tělesa je přímo úměrné výslednici působících sil a nepřímo úměrné jeho hmotnosti.

$$F = \frac{dp}{dt}, \text{ kde } p \text{ je hybnost hmotného bodu}$$

$$\text{pro konstantní hmotnost } F = m \frac{dv}{dt} = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m}$$

Časová změna hybnosti hmotného bodu (derivace hybnosti podle času) je rovna síle, která na hmotný bod působí. Tato vztah platí i v případě, že hmotnost závisí na rychlosti (tj. pro rychlost, která není zanedbatelná vzhledem k rychlosti světla c).

Třetí pohybový zákon – zákon akce a reakce

Působí-li jedno těleso na druhé silou F , působí druhé na první silou F' , která je stejně velká a má opačný směr,

2.2 Lagrangeovy rovnice

Pro pohyb hmotného bodu M_i ležícího v místě o souřadnicích $[x_i; y_i; z_i]$ v kartézské soustavě souřadnic O_{xyz} vyvolaném působením síly o souřadnicích F_{xi} , F_{yi} , F_{zi} platí Newtonovy rovnice:

$$F_{xi} = m\ddot{x}_i, \quad F_{yi} = m\ddot{y}_i, \quad F_{zi} = m\ddot{z}_i$$

Tyto vztahy určují složky výsledné síly, která působí na hmotný bod a to ve směru os x , y , z , kde m je hmotnost, \ddot{x} je zrychlení (druhá derivace dráhy podle času) ve směru osy x , \ddot{y} je zrychlení (druhá derivace dráhy podle času) ve směru osy y a \ddot{z} je zrychlení (druhá derivace dráhy podle času) ve směru osy z .

Lagrangeovy rovnice II. druhu pro pohybové rovnice soustavy hmotných objektů se zobecněnými souřadnicemi q_1, q_2, \dots, q_n

Tato rovnice nám umožní získat soustavu pohybových rovnic pro popis mechanické soustavy, která je tvořena hmotnými tělesy umístěnými v konzervativním poli.

Lagrangeova rovnice II. druhu má tvar:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

kde L je Lagrangeova funkce a je rovna $W_k - W_p$, kde W_k je celková kinetická energie mínus celková potenciální energie soustavy, \dot{q} popisuje rychlost, která je rovna časové derivaci polohy q , F je výslednice vnějších nekonzervativních sil způsobující změnu souřadnice q_i . V dynamice budeme ověřovat nebo přímo počítat v Maximě, ale z důvodů úspory místa výpisy z programu Maxima nebudu zobrazovat.

2.3 Kinetická energie

Pro výpočet Lagrangeových rovnic II. druhu je potřebné určit kinetickou a potenciální energii.

Kinetická energie (též pohybová energie) je jeden z druhů mechanické energie, kterou má pohybující se těleso. Je to tedy práce, kterou musíme vykonat, abychom urychlili těleso na určitou rychlost. Velikost kinetické energie tělesa, vykonávajícího posuvný pohyb závisí na jeho hmotnosti a rychlosti. Vykonává-li těleso rotační pohyb, závisí jeho energie na úhlové rychlosti a momentu setrvačnosti. Je-li těleso v klidu, má nulovou kinetickou energii. Protože pohyb těles je relativní, záleží hodnota kinetické energie na tom, z jaké vztažné soustavy těleso pozorujeme. Soustava se skládá ze sloupu, ramene, pohonu lana a zátěže. V následujícím textu jsou uvedeny výpočty pro tyto jednotlivé části.

Kinetická energie sloupu:

$$W_{k_sloup} = \frac{1}{2} J \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

Kinetická energie ramene:

Je-li rameno homogenní, pak pro jeho hustotu a hmotu m platí:

$$\rho = \frac{m}{\text{š.v.}(a+b)} \text{ a tedy } dm = \rho \cdot \text{š.v.} dx = \frac{m}{\text{š.v.}(a+b)} \cdot \text{š.v.} dx \Rightarrow dm = m \cdot \frac{dx}{a+b}$$

Poloha dm v absolutní soustavě souřadnic $O_{x_0y_0z_0}$ je:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\alpha) & \cos(\theta)\sin(\alpha) & \sin(\theta) & -b\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ \sin(\theta)\cos(\alpha) & \sin(\theta)\sin(\alpha) & -\cos(\theta) & -b\sin(\theta)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & h + b\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x-b)\cos(\alpha)\cos(\theta) \\ (x-b)\cos(\alpha)\sin(\theta) \\ h - (x-b)\sin(\alpha) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Druhá mocnina absolutní rychlosti elementu dm:

Musíme získat absolutní složky rychlosti tak, že polohu bodu dm z derivujeme podle času pomocí parciálních derivací všech proměnných. Proměnné v čase v tomto případě jsou (θ) a (α) . Tedy:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$V_x = \frac{d((x-b) \cos(\alpha) \cos(\theta))}{d\alpha} + \frac{d((x-b) \cos(\alpha) \cos(\theta))}{d\theta} = (x-b) (-\sin(\alpha)) \cos(\theta) \frac{d\alpha}{dt} +$$

$$(x-b) \cos(\alpha) (-\sin(\theta)) \frac{d\theta}{dt}$$

$$V_y = \frac{d((x-b) \cos(\alpha) \sin(\theta))}{d\alpha} + \frac{d((x-b) \cos(\alpha) \sin(\theta))}{d\theta} = (x-b) (-\sin(\alpha)) \sin(\theta) \frac{d\alpha}{dt} +$$

$$(x-b) \cos(\alpha) \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt}$$

$$V_z = \frac{d(h-(x-b) \sin(\alpha))}{d\alpha} + \frac{d(h-(x-b) \sin(\alpha))}{d\theta} = (x-b) \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt}$$

Po dosazení do vzorce absolutní rychlosti:

$$V^2 = \left[(x-b) (-\sin(\alpha)) \cos(\theta) \frac{d\alpha}{dt} + (x-b) \cos(\alpha) (-\sin(\theta)) \frac{d\theta}{dt} \right]^2 + \left[(x-b) \cos(\alpha) (-\sin(\theta)) \frac{d\alpha}{dt} + (x-b) \cos(\alpha) (-\cos(\theta)) \frac{d\theta}{dt} \right]^2 + \left[(x-b) \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \right]^2 =$$

$$= (x-b)^2 \left[(-\sin(\alpha))^2 \cos^2(\theta) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \cos^2(\alpha) (-\sin(\theta))^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + (x-b)^2 \left[(-\sin(\alpha)) \sin(\theta) \frac{d\alpha}{dt} + \cos(\alpha) \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \right]^2 + \left[\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} + 0 \right]^2 \right] =$$

$$= (x-b)^2 \left[(\sin(\alpha)^2 \cos(\theta)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2) + 2 \sin(\alpha) \cos(\theta) \cos(\alpha) \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \frac{d\alpha}{dt} + (\cos(\alpha)^2 \sin(\theta)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2) + (\sin(\alpha)^2 \sin(\theta)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2) - 2 \sin(\alpha) \sin(\theta) \cos(\alpha) \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \frac{d\alpha}{dt} + (\cos(\alpha)^2 \cos(\theta)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \cos(\alpha)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2) \right] =$$

$$= (x-b)^2 \left[(\sin(\alpha)^2 \cos(\theta)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(\alpha)^2 \sin(\theta)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + (\sin(\alpha)^2 \sin(\theta)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(\alpha)^2 \cos(\theta)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \cos(\alpha)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2) \right] =$$

$$= (x-b)^2 \left[(\sin(\alpha)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 (\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) + (\cos(\alpha)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2) + \cos(\alpha)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2) \right] = (x-b)^2 \left[(\sin(\alpha)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \right.$$

$$\begin{aligned} & \left(\cos(\alpha)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \cos(\alpha)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \right) = (x - \\ & b)^2 \left[\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 (\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2) + \cos(\alpha)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = \\ & = (x - b)^2 \left[\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \cos(\alpha)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{1}{2} (x - b)^2 \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Za použití vztahů $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2$$

Kinetická energie elementu dm je:

$$\begin{aligned} dW_k &= \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{4} dm (x - b)^2 \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = \\ & \frac{1}{4} m \frac{dx}{a+b} (x - b)^2 \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Celková kinetická energie ramene je:

$$\begin{aligned} & \int_0^{a+b} \frac{1}{4} m \frac{1}{a+b} (x - b)^2 \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] dx = \\ & \frac{1}{12} m \frac{1}{a+b} (a + b - b)^3 \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] - \frac{1}{12} m \frac{1}{a+b} (0 - \\ & b)^3 \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{1}{12} m \frac{1}{a+b} (a)^3 \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \\ & \frac{1}{12} m \frac{1}{a+b} (b)^3 \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{1}{12} m \frac{1}{a+b} (a^3 + b^3) \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Kinetická energie pohonu lana ($x=0$):

$$W_{k_pohon} = W_{krotace} + W_{kposuv}$$

$$\begin{aligned} W_{k_pohon} &= \frac{1}{2} J_{kladka} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \frac{1}{2} (b)^2 \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{1}{2} J_{kladka} (\omega)^2 + \frac{1}{4} m b^2 \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\text{A pro } \omega = \frac{v}{r} \text{ a } v = \frac{ds}{dt}$$

Platí:

$$\frac{1}{2} \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \frac{1}{2} (b)^2 \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

Kinetická energie zátěže:

Poloha hmoty zátěže jako hmotného bodu o hmotě M v absolutní soustavě souřadnic

$$\begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & -r\cos(\theta) - b\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & -r\sin(\theta) - b\sin(\theta)\cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & h + b\sin(\alpha) - s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^*$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta) (b\cos(\alpha) + r) \\ -\sin(\theta) (b\cos(\alpha) + r) \\ h + b\sin(\alpha) - s \\ 1 \end{bmatrix}$$

Musíme získat absolutní složky rychlosti tak, že polohu hmoty zátěže derivujeme podle času pomocí parciálních derivací všech proměnných. Proměnné v čase v tomto případě jsou (θ) , (α) a s .

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d(-\cos(\theta)(b\cos(\alpha)+r))}{dt} + \frac{d(-\cos(\theta)(b\cos(\alpha)+r))}{dt} + \frac{d(-\cos(\theta)(b\cos(\alpha)+r))}{dt} \\ &= -\cos(\theta) b(-\sin(\alpha)) \frac{d\alpha}{dt} + (\sin(\theta) (b\cos(\alpha) + r)) \frac{d\theta}{dt} + 0 \frac{ds}{dt} \\ v_y &= \frac{d(-\sin(\theta)(b\cos(\alpha)+r))}{dt} + \frac{d(-\sin(\theta)(b\cos(\alpha)+r))}{dt} + \frac{d(-\sin(\theta)(b\cos(\alpha)+r))}{dt} = \\ &= -\sin(\theta) b(-\sin(\alpha)) \frac{d\alpha}{dt} + (-\cos(\theta) (b\cos(\alpha) + r)) \frac{d\theta}{dt} + 0 s \frac{d\theta}{dt} \\ v_z &= \frac{d(h+b\sin(\alpha)-s)}{dt} + \frac{d(h+b\sin(\alpha)-s)}{dt} + \frac{d(h+b\sin(\alpha)-s)}{dt} = \\ &= b\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} + 0 - 1 \frac{ds}{dt} \end{aligned}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Po dosazení do vzorce absolutní rychlosti:

$$\begin{aligned}
v^2 &= \left[-\cos(\theta) b(-\sin(\alpha)) \frac{d\alpha}{dt} + (\sin(\theta) (b\cos(\alpha) + r) \frac{d\theta}{dt} \right]^2 + \\
&\left[-\sin(\theta) b(-\sin(\alpha)) \frac{d\alpha}{dt} + (-\cos(\theta) (b\cos(\alpha) + r) \frac{d\theta}{dt} \right]^2 + \left[b\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} - \frac{ds}{dt} \right]^2 = \\
&\left[(b^2 \sin(\alpha)^2 \cos(\theta)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + 2 \cos(\theta) b \sin(\alpha) (\sin(\theta) (b\cos(\alpha) + r) \frac{d\theta}{dt} \frac{d\alpha}{dt} + \right. \\
&\quad \left. \sin(\theta)^2 (b\cos(\alpha) + r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \left[(b^2 \sin(\alpha)^2 \sin(\theta)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - 2 \cos(\theta) b \sin(\alpha) (\sin(\theta) (b\cos(\alpha) + r) \frac{d\theta}{dt} \frac{d\alpha}{dt} + \right. \\
&\quad \left. \cos(\theta)^2 (b\cos(\alpha) + r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \left[(b^2 \cos(\alpha)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - 2 b\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right] = \\
&\quad (b^2 \sin(\alpha)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 (\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) + (b\cos(\alpha) + r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (\sin(\theta)^2 + \\
&\quad \cos(\theta)^2) + b^2 \cos(\alpha)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - 2 b\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \left[b^2 \sin(\alpha)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. (b\cos(\alpha) + r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + b^2 \cos(\alpha)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - 2 b\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right] = \\
&b^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 [(\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2)] + (b\cos(\alpha) + r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - 2 b\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \\
&\quad b^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (b\cos(\alpha) + r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - 2 b\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = b^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \\
&\quad - 2 b\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (b^2 \cos^2 \alpha + 2 b\cos(\alpha) + r^2) = b^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \\
&\quad - 2 b\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (b^2 \cos^2 \alpha + 2 b\cos(\alpha) + r^2) = b^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \\
&\quad - 2 b\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left(\frac{1}{2} b^2 (2\cos^2 \alpha + 1 - 1) + 2 b\cos(\alpha) + \right. \\
&\quad \left. r^2 \right) = b^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - 2 b\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left(\frac{1}{2} b^2 (\cos(2\alpha) + 1) + 2 b\cos(\alpha) + \right. \\
&\quad \left. r^2 \right)
\end{aligned}$$

Za použití vztahů $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2$$

Kinetická energie hmoty zátěže je:

$$W_{k_load} = \frac{1}{2} M \left(b^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - 2 b\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left(\frac{1}{2} b^2 (\cos(2\alpha) + 1) + 2 b\cos(\alpha) + r^2 \right) \right)$$

Celková kinetická energie soustavy je:

$$W_k = W_{k_sloup} + W_{k_ramene} + W_{k_pohon} + W_{k_load}$$

$$\begin{aligned}
W_k = & \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \\
& + \frac{1}{12} m \frac{1}{a+b} (a^3 + b^3) \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{1}{2} \frac{J_{kladka}}{r^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \frac{1}{2} (b)^2 \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{1}{2} M (b^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - 2b \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left(\frac{1}{2} b^2 (\cos(2\alpha) + 1) + 2b r \cos(\alpha) + r^2 \right))
\end{aligned}$$

2.4 Potenciální energie

Tíhová potenciální energie a její změny souvisí s prací, kterou vykoná tíhová síla při pohybu tělesa v tíhovém poli Země. Soustava se skládá ze sloupu, ramene, pohonu lana a zátěže. V následujícím textu jsou uvedeny výpočty pro tyto jednotlivé části.

Potenciální energie ramena

Potenciální energie elementu dm je

$$dW_{p_x} = dm \cdot g \cdot (h + x \cdot \sin \alpha) \cdot dx = m \cdot \frac{1}{a+b} \cdot g \cdot [h + (b-x) \cdot \sin \alpha] \cdot dx$$

Celková potenciální energie ramena je:

$$W_{p_{rameno}} = \int_0^{b+a} dW_{p_x} = m \cdot g \cdot \left[\frac{(b-a)}{2} \cdot \sin \alpha + h \right]$$

Potenciální energie pohonu lana

$$W_{p_{pohon}} = m_{poh} \cdot g \cdot (h + b \cdot \sin \alpha)$$

Potenciální energie zátěže

$$W_{p_{load}} = M \cdot g \cdot [h + b \cdot \sin \alpha - s]$$

Celková potenciální energie soustavy je

$$W_p = W_{p_{rameno}} + W_{p_{pohon}} + W_{p_{load}}$$

$$W_p = m \cdot g \cdot \left[\frac{(b-a)}{2} \cdot \sin \alpha + h \right] + m_{poh} \cdot g \cdot (h + b \cdot \sin \alpha) + M \cdot g \cdot [h + b \cdot \sin \alpha - s]$$

Lagrangeova funkce L :

$$L = W_k - W_p$$

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \\
 & + \frac{1}{12} m \frac{1}{a+b} (a^3 + b^3) \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{J_{kladka}}{r^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \frac{1}{2} (b)^2 \left[2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\cos(2\alpha) + 1) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{2} M (b^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - 2b \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left(\frac{1}{2} b^2 (\cos(2\alpha) + 1) + 2br \cos(\alpha) + \right. \\
 & \left. r^2 \right) - (m \cdot g \cdot \left[\frac{(b-a)}{2} \cdot \sin \alpha + h \right] + m_{poh} \cdot g \cdot (h + b \cdot \sin \alpha) + M \cdot g \cdot [h + b \cdot \sin \alpha - s])
 \end{aligned}$$

2.5 Pohybové rovnice

Pomocí vztahu pro Lagrangeovy rovnice sestavíme pohybové rovnice pro jednotlivé články soustavy.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Pohybová rovnice pro první článek:

$$\begin{aligned}
 Q_1(t) = f_\theta &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \\
 & \ddot{\theta} \cdot \left\langle \frac{1}{2} \cdot M \cdot \{r^2 + b^2 \cdot [\cos(2\alpha) + 1] + 2 \cdot b \cdot r \cdot \cos \alpha\} + J + \frac{1}{2} \cdot m_{poh} \cdot b^2 \cdot [\cos(2\alpha) + 1] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{6 \cdot (a+b)} \cdot m \cdot (b^3 + a^3) \cdot [\cos(2\alpha) + 1] \right\rangle + \\
 & + \dot{\alpha} \cdot \dot{\theta} \cdot \left\langle -2 \cdot M \cdot b \cdot r \cdot \sin \alpha - M \cdot b^2 \cdot \sin(2\alpha) - m_{poh} \cdot b^2 \cdot \sin(2\alpha) - \frac{1}{3} \cdot m \cdot b^2 \cdot \sin(2\alpha) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{3} \cdot m \cdot b \cdot a \cdot \sin(2\alpha) - \frac{1}{3} \cdot m \cdot a^2 \cdot \sin(2\alpha) \right\rangle \\
 \Rightarrow \\
 Q_1(t) = f_\theta &= \ddot{\theta} \cdot \left\langle \frac{1}{2} \cdot M \cdot \{r^2 + b^2 \cdot [\cos(2\alpha) + 1] + 2 \cdot b \cdot r \cdot \cos \alpha\} + J + \frac{1}{2} \cdot m_{poh} \cdot b^2 \cdot [\cos(2\alpha) + 1] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{6 \cdot (a+b)} \cdot m \cdot (b^3 + a^3) \cdot [\cos(2\alpha) + 1] \right\rangle + \\
 & + \dot{\alpha} \cdot \dot{\theta} \cdot \left\langle -2 \cdot M \cdot b \cdot r \cdot \sin \alpha - \left(M \cdot b^2 + m_{poh} \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right) \cdot \sin(2\alpha) \right\rangle \Rightarrow \\
 \Rightarrow Q_1(t) = f_\theta &= \\
 & = \ddot{\theta} \cdot \left\langle \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 + M \cdot b \cdot r \cdot \cos \alpha + J + \frac{1}{2} \cdot \left[(M + m_{poh}) \cdot b^2 + \frac{1}{3 \cdot (a+b)} \cdot m \cdot (b^3 + a^3) \right] \cdot [\cos(2\alpha) + 1] \right\rangle + \\
 & + \dot{\alpha} \cdot \dot{\theta} \cdot \left\langle -2 \cdot M \cdot b \cdot r \cdot \sin \alpha - \left[(M + m_{poh}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right] \cdot \sin(2\alpha) \right\rangle
 \end{aligned}$$

Pohybová rovnice pro druhý článek:

$$\begin{aligned}
 Q_2(t) = f_\alpha &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \ddot{\alpha} \cdot \left\langle (M + m_{poh}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right\rangle - \ddot{s} \cdot \langle M \cdot b \cdot \cos \alpha \rangle \\
 &+ \dot{\theta}^2 \cdot \left\langle M \cdot b \cdot r \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot M \cdot b^2 \cdot \sin(2\alpha) + \frac{1}{2} \cdot m_{poh} \cdot b^2 \cdot \sin(2\alpha) + \frac{1}{6} \cdot m \cdot b^2 \cdot \sin(2\alpha) - \right. \\
 &\left. - \frac{1}{6} \cdot m \cdot b \cdot a \cdot \sin(2\alpha) + \frac{1}{6} \cdot m \cdot a^2 \cdot \sin(2\alpha) \right\rangle + \\
 &+ g \cdot \left\langle b \cdot (M + m_{poh}) + m \cdot \frac{(b-a)}{2} \right\rangle \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \\
 Q_2(t) = f_\alpha &= \ddot{\alpha} \cdot \left\langle (M + m_{poh}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right\rangle - \ddot{s} \cdot \langle M \cdot b \cdot \cos \alpha \rangle + \\
 &+ \dot{\theta}^2 \cdot \left\langle M \cdot b \cdot r \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot \left[(M + m_{poh}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right] \right\rangle \cdot \sin(2\alpha) \rangle + \\
 &+ g \cdot \left\langle b \cdot (M + m_{poh}) + m \cdot \frac{(b-a)}{2} \right\rangle \cdot \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Pohybová rovnice pro 3 článek:

$$\begin{aligned}
 Q_3(t) = f_s &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = \ddot{\alpha} \cdot \langle -M \cdot b \cdot \cos \alpha \rangle + \ddot{s} \cdot \left\langle M + \frac{J_{kladka}}{r^2} \right\rangle + \\
 &+ \dot{\alpha}^2 \cdot \langle M \cdot b \cdot \sin \alpha \rangle - M \cdot g \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \\
 Q_3(t) = f_s &= \ddot{\alpha} \cdot \langle -M \cdot b \cdot \cos \alpha \rangle + \ddot{s} \cdot \left\langle M + \frac{J_{kladka}}{r^2} \right\rangle + \dot{\alpha}^2 \cdot \langle M \cdot b \cdot \sin \alpha \rangle - M \cdot g
 \end{aligned}$$

2.6 Maticová forma pohybových rovnic

Maticová forma pohybových rovnic pro sériový robotický manipulátor má obecně tvar:

$$D(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) + G(q) = Q$$

$$D(q)\ddot{q} = Q - H(q, \dot{q}) - G(q)$$

$$D^{-1}(q)D(q)\ddot{q} = D^{-1}(q)(Q - H(q, \dot{q}) - G(q))$$

$$\ddot{q} = D^{-1}(q)(\bar{Q} - H(q, \dot{q}) - G(q))$$

Kde $D(q)$ je symetrická matice setrvačnosti, $H(q, \dot{q})$ je vektor rychlostních vazeb a $G(q)$ je vektor gravitační síly.

$$D(\theta, \alpha, s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 + M \cdot b \cdot r \cdot \cos \alpha + J + \frac{1}{2} \cdot \left[(M + m_{poh}) \cdot b^2 + \frac{1}{3 \cdot (a+b)} \cdot m \cdot (b^3 + a^3) \right] \cdot [\cos(2\alpha) + 1] & 0 & 0 \\ 0 & (M + m_{poh}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} & -M \cdot b \cdot \cos \alpha \\ 0 & -M \cdot b \cdot \cos \alpha & M + \frac{J_{kladka}}{r^2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{H}(\theta, \alpha, s, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, \dot{s}) = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cdot \dot{\theta} \cdot \left\langle -2 \cdot M \cdot b \cdot r \cdot \sin \alpha - \left[(M + m_{poh}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right] \cdot \sin(2\alpha) \right\rangle \\ \dot{\theta}^2 \cdot \left\langle M \cdot b \cdot r \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot \left[(M + m_{poh}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right] \cdot \sin(2\alpha) \right\rangle \\ \dot{\alpha}^2 \cdot \langle M \cdot b \cdot \sin \alpha \rangle \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}(\theta, \alpha, s) = g \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \left\{ b \cdot (M + m_{poh}) + m \cdot \frac{(b-a)}{2} \right\} \cdot \cos \alpha \\ -M \end{bmatrix}$$

Odvozením získáme:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{s} \end{bmatrix} &= \frac{\tau_{\theta} - \dot{\alpha} \cdot \dot{\theta} \cdot \left\langle -2 \cdot M \cdot b \cdot r \cdot \sin \alpha - \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right] \cdot \sin(2\alpha) \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 + M \cdot b \cdot r \cdot \cos \alpha + J + \frac{1}{2} \cdot \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{3 \cdot (a+b)} \right] \cdot [\cos(2\alpha) + 1] \right\rangle} \\
 &- \left(M + \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \right) \cdot \left\{ \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right] \cdot \sin(2\alpha) + M \cdot b \cdot r \cdot \sin \alpha \right\} \cdot \dot{\theta}^2 + \left(M + \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \right) \cdot \tau_{\alpha} + \\
 &+ g \cdot \cos \alpha \cdot \left\{ M^2 \cdot b - \left(M + \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \right) \cdot \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b + \frac{m \cdot (a+b)}{2} \right] \right\} + M \cdot b \cdot f_s \cdot \cos \alpha - \\
 &- \frac{1}{2} \cdot M^2 \cdot b^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \cdot \dot{\alpha}^2 \\
 &= \frac{\left(M + \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \right) \cdot \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{3 \cdot (a+b)} \right] - M^2 \cdot b^2 \cdot \cos^2 \alpha}{\left(M + \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \right) \cdot \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{3 \cdot (a+b)} \right] - M^2 \cdot b^2 \cdot \cos^2 \alpha} \\
 &- M \cdot b \cdot \cos \alpha \cdot \left\{ \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right] \cdot \sin(2\alpha) + M \cdot b \cdot r \cdot \sin \alpha \right\} \cdot \dot{\theta}^2 + \left(M + \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \right) \cdot \tau_{\alpha} + \\
 &+ M \cdot b \cdot f_s \cdot \cos \alpha + g \cdot M \cdot \left\{ \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right] - b \cdot \cos^2 \alpha \cdot \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b + \frac{m \cdot (a+b)}{2} \right] \right\} - \\
 &- \frac{1}{2} \cdot M^2 \cdot b^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \cdot \dot{\alpha}^2 \\
 &= \frac{\left(M + \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \right) \cdot \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{3 \cdot (a+b)} \right] - M^2 \cdot b^2 \cdot \cos^2 \alpha}{\left(M + \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \right) \cdot \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{3 \cdot (a+b)} \right] - M^2 \cdot b^2 \cdot \cos^2 \alpha}
 \end{aligned}$$

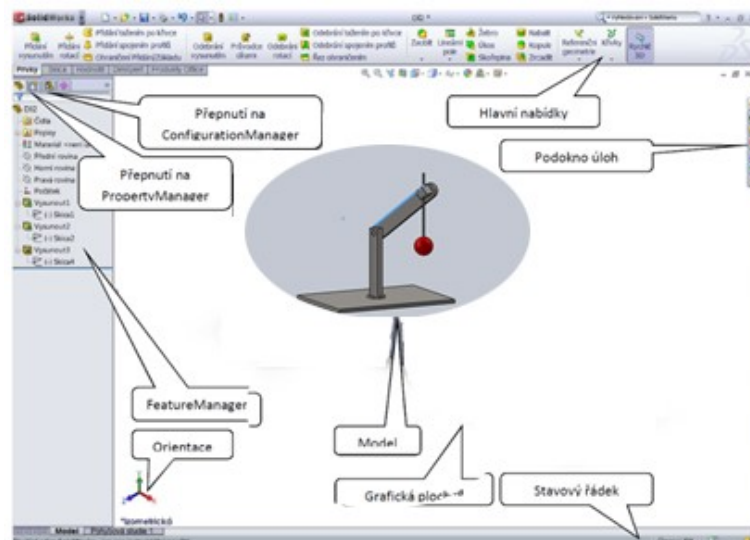
II. PRAKTICKÁ ČÁST

3 SOLIDWORKS - 3D CAD

SolidWorks je v současné době nejúspěšnější strojírenský 3D CAD systém na českém trhu, což dokazuje také každoroční nárůst počtu prodaných licencí. Zároveň je SolidWorks jediný CAD systém na českém trhu, který je kompletně lokalizován přímo výrobcem, tedy společností Dassault Systèmes SolidWorks. Jako parametrický 3D modelář nám SolidWorks nabízí výkonné objemové i plošné modelování, vertikální nástroje pro plechové díly, svařence a formy, práci s neomezeně rozsáhlými sestavami a automatické generování výrobních výkresů. Pokud mluvíme o SolidWorks, mluvíme v prvé řadě o snadném a vizuálně přehledném ovládní. Uživatelské rozhraní SolidWorks je velmi intuitivní a nabízí pohodové pracovní postupy, rapidně snižuje nutné pohyby myši a umožňuje okamžitou, kontextově závislou interakci s uživatelem. Ovládní je založené na technologii SWIFT, která redukuje potřebu opakujících se úkonů, manuálních zásahů i takových operací, kde si ani zkušený uživatel není dopředu jist postupem a často sahá po metodě pokus omyl. SWIFT dokáže ušetřit významné množství času a umožní se více věnovat samotnému procesu navrhování a ne ovládní systému a právě toho jsem využil k sestrojení modelu (<https://www.solidvision.cz/solidworks/>).

3.1 Popis Solidworksu – úvodní menu

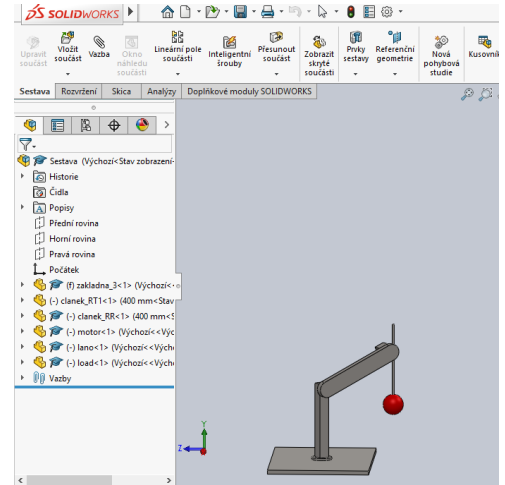
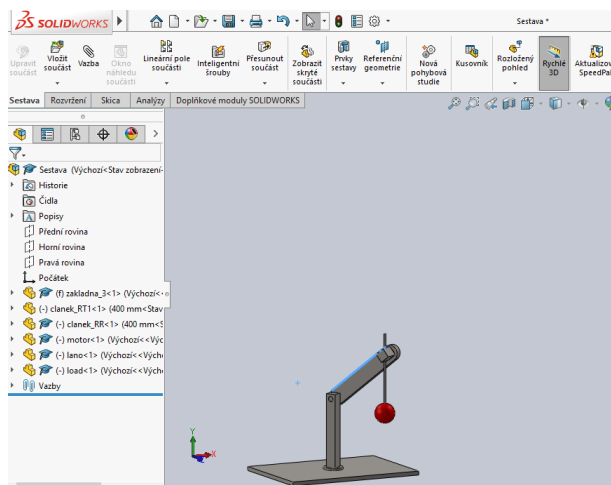
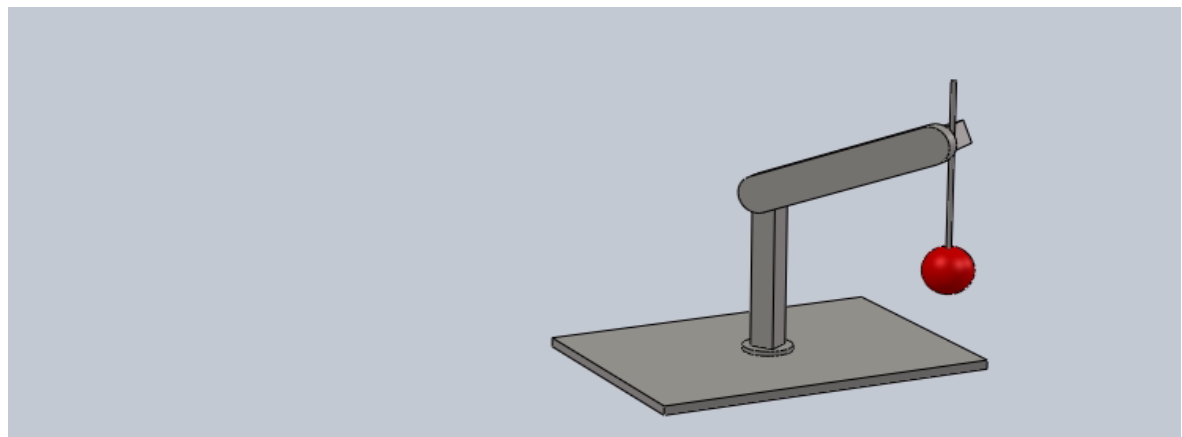
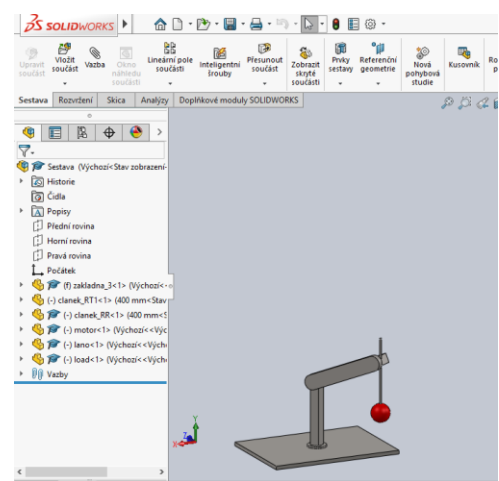
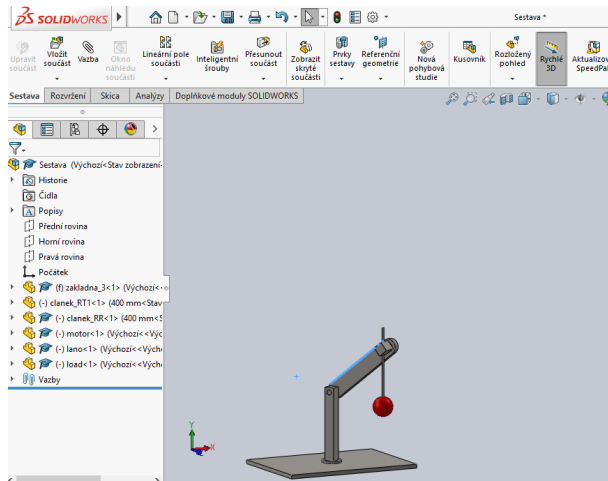
Obrázek 6 SolidWorks



Zdroj: vlastní tvorba

3.2 Sestavení funkčního modelu a ověření pohyblivosti

V připojených snímcích obrazovky a videu můžeme vidět model robotického ramena – SolidWorks (Robotické rameno)



4 DYNAST

Program DYNAST je simulačně programové prostředí vytvořené pro jednoduché a efektivní modelování fyzikálních a elektrických jevů. Zadávání do programu probíhá graficky nebo textovou formou. Pomocí vestavěných knihoven Dynastu můžeme rychle vytvářet modely reálných situací a dokonce nemusíme psát rovnice, stačí vytvořit bloky a pospojovat je. Program si sám vygeneruje potřebné rovnice,

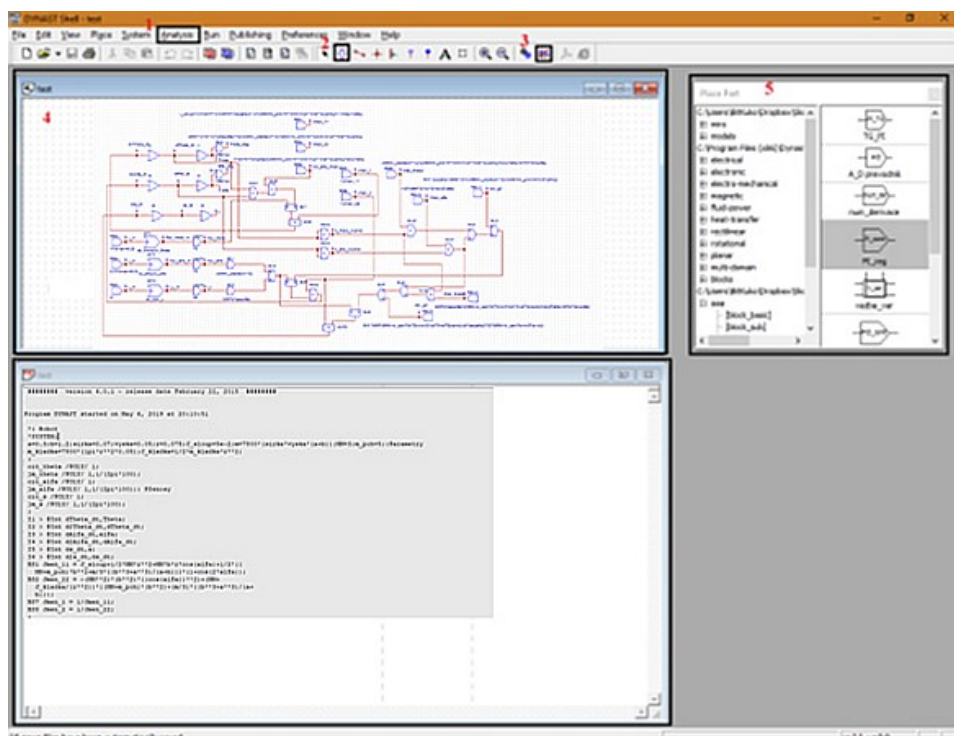
Konfigurace programového prostředí

4.1 Popis Dynastu – úvodní menu

Výpočtové jádro programu DYNAST (DYNAST Solver) umožňuje řešit:

- Nelineární a nestacionární problémy
- Automatickou formulaci a řešení rovnic zadané pomocí grafického návrhu
- Řešení soustav zadaných textově
- Řešení rovnic zadaných graficky s pomocí blokového schématu
- Výpočet závislosti ustáleného řešení na změnách parametrů
- Linearizaci schémat v okolí pracovního bodu
- Linearizované úlohy zadané v podobě grafického zadání
- Výpočet nul a pólů přenosové funkce
- Vyjádření časové odezvy

Obrázek 7 Menu programu Dynast



Na obrázku je vyznačených 6 oblastí, které jsou pro práci s programem Dynastem důležité. Oblast číslo 1 je ikona Analysis, pomocí kterého se dostaneme do menu, kde si můžeme vybrat z následujících možností - Nonlinear, Numerical Frequency a Semisymbolic Linear. Nejdůležitější část menu Analysis je Nonlinear.

Oblast číslo 2 označuje ikona, které vyvolá okno číslo 2 – knihovna modelů součástek, které jsou přeprogramované DYNASTu. Knihovnu je možné stále rozšiřovat o další vlastní modely.

Vyznačená oblast číslo 3 je ikona umožňující spustit řešitele, které dokáže spustit řešitele. V této chvíli se spustí výpočet zadaného problému.

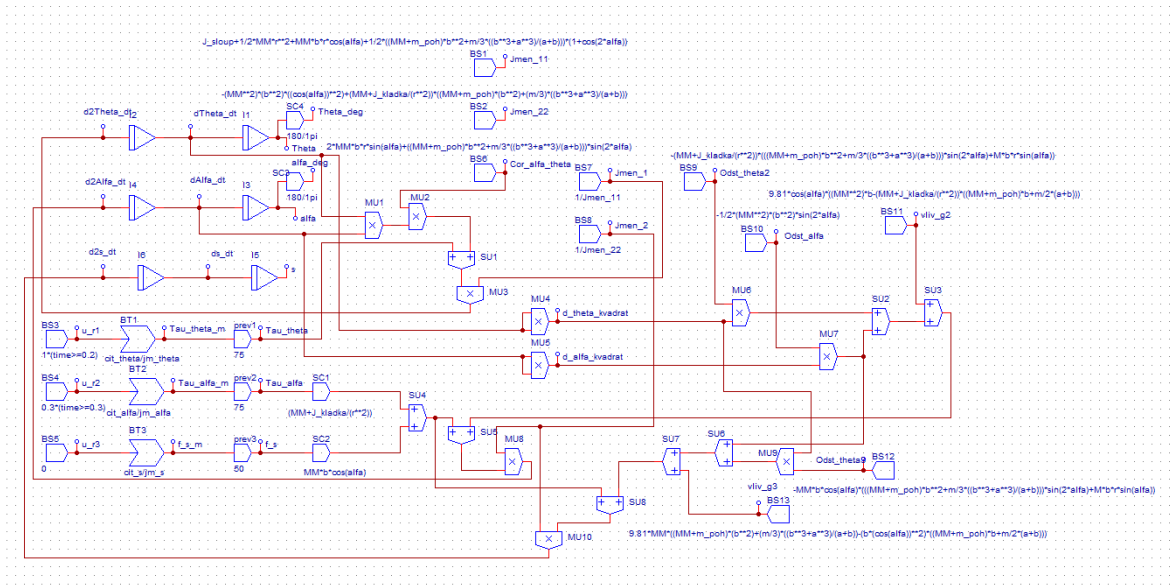
Konečně oblasti číslo 4 a 6 jsou rozhraní grafického pro zadávání grafického nebo textového modelu tvaru. Je možné měnit případně do něho doplnit dodatečné informace

4.2 Sestavení funkčního modelu

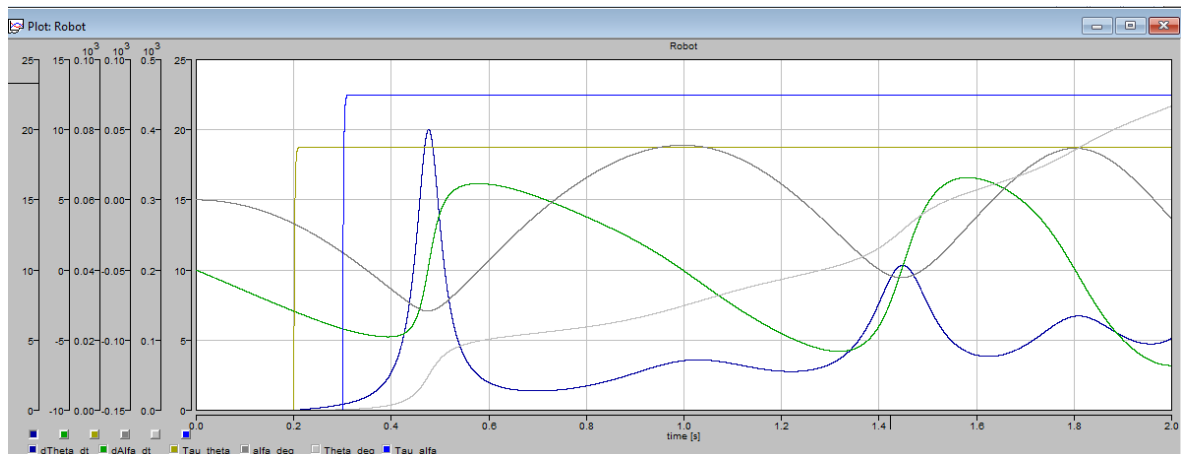
Pro sestavení programu využijeme tyto rovnice:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{s} \end{bmatrix} = \frac{\begin{aligned} & \tau_{\theta} - \dot{\alpha} \cdot \dot{\theta} \cdot \left\langle -2 \cdot M \cdot b \cdot r \cdot \sin \alpha - \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right] \cdot \sin(2\alpha) \right\rangle \\ & \left\langle \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 + M \cdot b \cdot r \cdot \cos \alpha + J + \frac{1}{2} \cdot \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{3 \cdot (a+b)} \right] \cdot [\cos(2\alpha) + 1] \right\rangle \\ & - \left(M + \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \right) \cdot \left\{ \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right] \cdot \sin(2\alpha) + M \cdot b \cdot r \cdot \sin \alpha \right\} \cdot \dot{\theta}^2 + \left(M + \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \right) \cdot \tau_{\alpha} + \\ & + g \cdot \cos \alpha \cdot \left\{ M^2 \cdot b - \left(M + \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \right) \cdot \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b + \frac{m \cdot (a+b)}{2} \right] \right\} + M \cdot b \cdot f_s \cdot \cos \alpha - \\ & - \frac{1}{2} \cdot M^2 \cdot b^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \cdot \dot{\alpha}^2 \end{aligned}}{\begin{aligned} & \left(M + \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \right) \cdot \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{3 \cdot (a+b)} \right] - M^2 \cdot b^2 \cdot \cos^2 \alpha \\ & - M \cdot b \cdot \cos \alpha \cdot \left\{ \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right] \cdot \sin(2\alpha) + M \cdot b \cdot r \cdot \sin \alpha \right\} \cdot \dot{\theta}^2 + \left(M + \frac{J_{\text{kladka}}}{r^2} \right) \cdot \tau_{\alpha} + \\ & + M \cdot b \cdot f_s \cdot \cos \alpha + g \cdot M \cdot \left\{ \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{(a+b)} \right] - b \cdot \cos^2 \alpha \cdot \left[(M + m_{\text{poh}}) \cdot b + \frac{m \cdot (a+b)}{2} \right] \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \cdot M^2 \cdot b^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \cdot \dot{\alpha}^2 \end{aligned}} =$$

Okno Diagram programu:



Závislosti proměnných: dTheta_dt, dAlfa_dt, s, ds_dt, Jmen_11, Tau_theta, alfa_deg, Theta_deg, Tau_alfa, vliv_g2:



Okno Text programu (výpis v příloze):

```
##### version 4.0.1 - release date February 22, 2015 #####

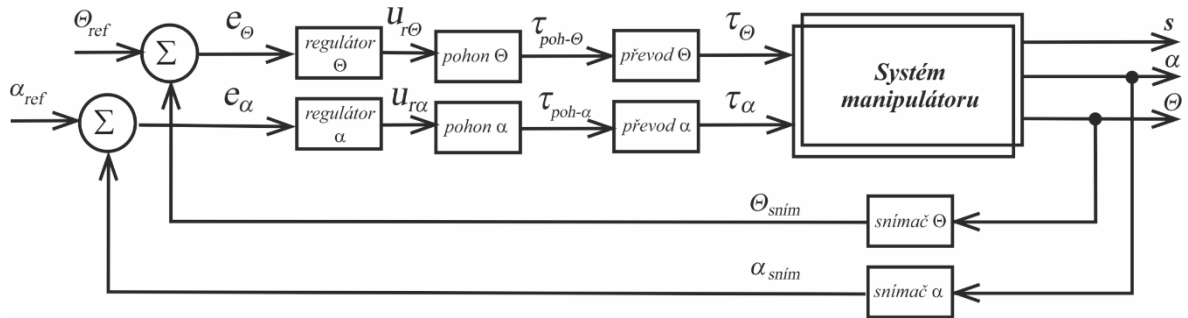
Program DYNAST started on May 6, 2019 at 20:10:51

*: Robot
*SYSTEM;
a=0.3;b=1.2;sirka=0.07;vyska=0.05;r=0.075;J_sloup=5e-2;m=7800*(sirka*vyska*(a+b));MM=3;m_poh=5;Parametry
m_kladka=7800*(lpi*r**2*0.05);J_kladka=1/2*m_kladka*r**2;
:
cit_theta /POLY/ 1;
jm_theta /POLY/ 1,1/(2pi*100);
cit_alfa /POLY/ 1;
jm_alfa /POLY/ 1,1/(2pi*100);: Přenosy
cit_s /POLY/ 1;
jm_s /POLY/ 1,1/(2pi*100);
:
I1 > @Int dTheta_dt,Theta;
I2 > @Int d2Theta_dt,dTheta_dt;
I3 > @Int dAlfa_dt,alfa;
I4 > @Int d2Alfa_dt,dAlfa_dt;
I5 > @Int ds_dt,s;
I6 > @Int d2s_dt,ds_dt;
BS1 Jmen_11 = J_sloup+1/2*MM*r**2+MM*b*r*cos(alfa)+1/2*((
MM+m_poh)*b**2+m/3*((b**3+a**3)/(a+b)))*(1+cos(2*alfa));
BS2 Jmen_22 = -(MM**2)*(b**2)*((cos(alfa))**2)+(MM+
J_kladka/(r**2))*((MM+m_poh)*(b**2)+m/3)*((b**3+a**3)/(a+
b)));
BS7 Jmen_1 = 1/Jmen_11;
BS8 Jmen_2 = 1/Jmen_22;
:
BS3 u_r1 = 1*(time>=0.2);
BS4 u_r2 = 0.3*(time>=0.3);
BS5 u_r3 = 0;

BT1 Tau_theta_m = cit_theta/jm_theta * u_r1;
BT2 Tau_alfa_m = cit_alfa/jm_alfa * u_r2;
BT3 f_s_m = cit_s/jm_s * u_r3;
BS6 Cor_alfa_theta = 2*MM*b*r*sin(alfa)+((MM+m_poh)*b**2+m/
3*((b**3+a**3)/(a+b)))*sin(2*alfa);

MU1 > @Multiplier dTheta_dt,dAlfa_dt,1;
SU1 > @Summator 2,Tau_theta,3;
prev1 > @Scalor Tau_theta_m,Tau_theta / 75;
prev2 > @Scalor Tau_alfa_m,Tau_alfa / 75;
prev3 > @Scalor f_s_m,f_s / 50;
MU2 > @Multiplier 1,Cor_alfa_theta,2;
MU3 > @Multiplier Jmen_1,3,d2Theta_dt;
MU4 > @Multiplier dTheta_dt,dTheta_dt,d_theta_kvadrat;
MU5 > @Multiplier dAlfa_dt,dAlfa_dt,d_alfa_kvadrat;
BS9 Odst_theta2 = -(MM+J_kladka/(r**2))*((MM+m_poh)*b**2+
m/3*((b**3+a**3)/(a+b)))*sin(2*alfa)+M*b*r*sin(alfa));
BS10 Odst_alfa = -1/2*(MM**2)*(b**2)*sin(2*alfa);
BS11 vliv_g2 = 9.81*cos(alfa)*(MM**2)*b-(MM+J_kladka/(r**2))*((MM+m_poh)*
b+m/2*(a+b));
SC1 > @Scalor Tau_alfa,4 / (MM+J_kladka/(r**2));
SC2 > @Scalor f_s,5 / MM*b*cos(alfa);
MU6 > @Multiplier Odst_theta2,d_theta_kvadrat,6;
MU7 > @Multiplier Odst_alfa,d_alfa_kvadrat,7;
SU2 > @Summator 6.7.8;
```

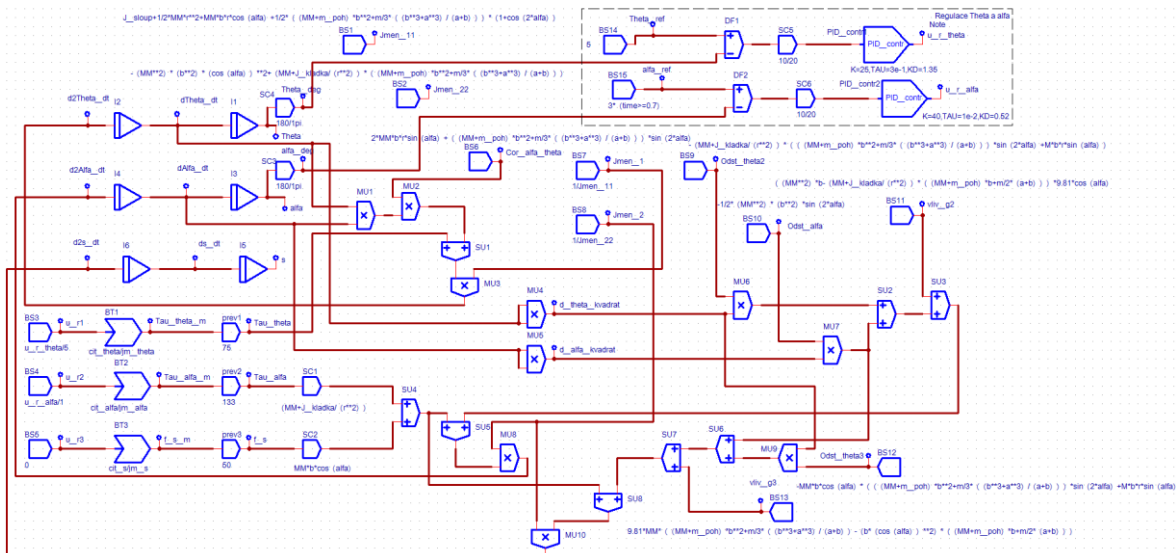

4.3 Použitá regulace



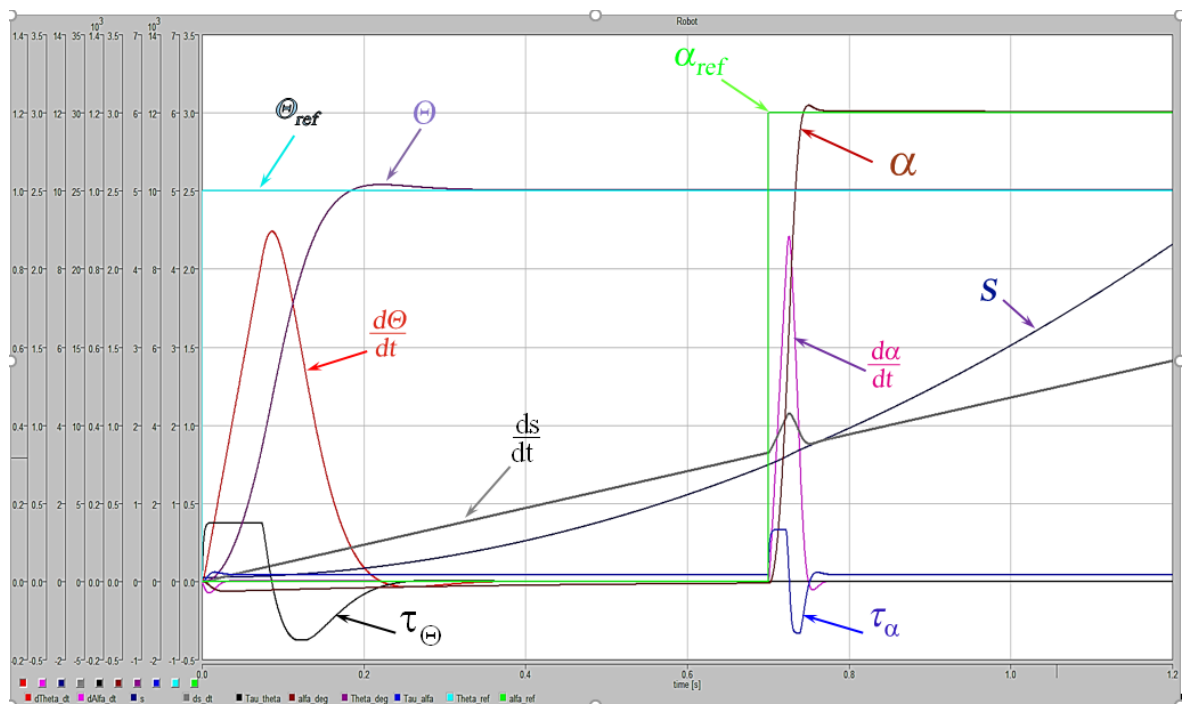
Obrázek 8 Blokové schéma použité regulace

Obrázek 8 ukazuje blokové schéma použité regulace. Autonomní regulátory regulují žádanou polohu Θ a α , zatímco délka závěsu s je ponechána „napospas“ vlivu dynamiky systému.

Obrázek 9 ukazuje zadání problému do systému Dynast. Je vidět, že zatímco Θ a α jsou regulovány (odezvy na skok žádaných hodnot), síla f_s je nulová. Tedy chování zátěže je jen vlivem gravitace a zrychlení ramene.



Obrázek 9 Schéma použité regulace v systému Dynast



Obrázek 10 Odezva mechaniky manipulátoru na sekvenci skoků žádaných hodnot Θ a α

4.4 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo na zadaném robotickém rameni:

- vyřešit základní kinematické úkoly (přímou a inverzní kinematickou úlohu);
- s pomocí takto vyřešených úloh sestavit pohybové rovnice pro jednotlivé články;
- zobrazit robotickou paži v 3D programech Geogebra a SolidWorks;
- správnost výpočtu kinematického modelu a dynamických rovnic ověřit simulací v prostředí Dynast;
- na základě modelu v programu Dynast navrhnout jednoduché regulace pro motory v kloubech robotické struktury.

V průběhu bakalářské práce byly odvozeny a vysvětleny všechny matematické vztahy, které byly použity při odvození kinetických a dynamických rovnic. Následně byly sestaveny modely v programech 3D Geogebra, Solidworks a Dynast. Výstupem této práce je kinematický popis, sestavení dynamických rovnic reálného robotického ramene a modely v programech 3-D Geogebra, SolidWorks. V programu Dynast byl vytvořen model bez regulace a s regulací. Cíl bakalářské práce byl splněn.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] CORKE, Peter I. *Robotics, vision and control: fundamental algorithms in MATLAB*. Berlin: Springer, 2013. ISBN 978-3-642-20143-1.
- [2] CRAIG, John J. *Introduction to robotics: mechanics and control*. 3rd ed. New Jersey: Pearson/Prentice Hall, c2005. ISBN 0201543613.
- [3] HALLIDAY, David, RESNICK, Robert, WALKER, Jearl a DUB, Petr. *Fyzika. 2., přeprac. vyd.* Brno: VUTIUM, c2013, 2 sv. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-4123-1.
- [4] MAN, Heřman, ŠEVČENKO, Michal. *Snadné počítačové modelování dynamických soustav*. Příručka k internetovému kurzu a simulačnímu systému DYNAST. 1. vyd. Praha: ČVUT, 2008. ISBN neuvedeno.
- [5] TRKAL, Viktor. *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*. 1. vyd. Praha: Československá akademie věd, 1956.
- [6] ÚŘEDNÍČEK, Zdeněk. *Robotika*. Zlín: Univerzita T. Bati ve Zlíně, 2012. ISBN 978-80-7454-223-7.

SEZNAM POUŽITÝCH ELEKTRONICKÝCH ZDROJŮ

- [1] *Kinematika*. [online], [cit. 2019-05-05]. Dostupné z:
<https://cs.wikipedia.org/wiki/Kinematika>.
- [2] *SW pro simulaci autonomních robotů* [online]. BRNO, 2007 [cit. 2019-05-05].
Dostupné z:
https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=66198.
- [3] *Softwarový systém DYNAST*. [online]. [cit. 2014-03-25]. Dostupné z:
<http://virtual.cvut.cz/dynastcz/#resic>.
- [4] ÚŘEDNÍČEK, Zdeněk. *Robotika*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2012, 1 online zdroj (280 s.). ISBN 978-80-7454-223-7. Dostupné z:
<http://hdl.handle.net/10563/18589>.
- [5] *The future of work: robotics*. [online], [cit. 2019-04-03]. Dostupné z:
<https://osha.europa.eu/en/tools-and-publications/publications/future-work-robotics/view>.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

s.s.	Souřadný systém
DH	Denavit - Hartenbergova notace
6DOF	6 stupňů volnosti
3D CAD	3D počítačové projektování, počítačem podporované navrhování

SEZNAM OBRÁZKŮ

- Obrázek 1 Zobrazení pravotočivé a levotočivé souřadné soustavy (strana 13)
- Obrázek 2 Kinematické uspořádání robota a souřadné soustavy (strana 14)
- Obrázek 3 Efektor s kloubem. (strana 15)
- Obrázek 4 Sériový robot s klouby (strana 15)
- Obrázek 5 Pracovní oblast robota pro $s=h$ (strana 24)
- Obrázek 6 SolidWorks (strana 38)
- Obrázek 7 Menu programu Dynast (strana 37)
- Obrázek 8 Blokové schéma použité regulace (strana 41)
- Obrázek 9 Schéma použité regulace v systému Dynast (strana 42)
- Obrázek 10 Odezva mechaniky manipulátoru na sekvenci skoků žádaných hodnot Θ a α (strana 42)
- Obrázek 11 Vztahy mezi φ , r , a , b (strana 58)

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1 DH notace (strana 15)

SEZNAM PŘÍLOH

- P I: Výpis programu robotického ramene v programu Dynast (bez regulace)
- P II: Výpis některých výpočtů z programu Maxima
- P III: Obecné řešení inverzní úlohy pro více stupňů volnosti
- P IV: Výpis programu robotického ramene v programu Dynast (s regulací)

Příloha P I: Výpis programu robotického ramene v programu Dynast

(bez regulace)

*: Robot

*SYSTEM;

a=0.3;b=1.2;sirka=0.07;vyska=0.05;r=0.075;J_sloup=5e-2;m=7800*(sirka*vy-
ska*(a+b));MM=3;m_poh=5;;Parametry

m_kladka=7800*(1pi*r**2*0.05);J_kladka=1/2*m_kladka*r**2;

:

cit_theta /POLY/ 1;

jm_theta /POLY/ 1,1/(2pi*100);

cit_alfa /POLY/ 1;

jm_alfa /POLY/ 1,1/(2pi*100);: Přenosy

cit_s /POLY/ 1;

jm_s /POLY/ 1,1/(2pi*100);

:

I1 > @Int dTheta_dt,Theta;

I2 > @Int d2Theta_dt,dTheta_dt;

I3 > @Int dAlfa_dt,alfa;

I4 > @Int d2Alfa_dt,dAlfa_dt;

I5 > @Int ds_dt,s;

I6 > @Int d2s_dt,ds_dt;

BS1 Jmen_11 = J_sloup+1/2*MM*r**2+MM*b*r*cos(alfa)+1/2*((
MM+m_poh)*b**2+m/3*((b**3+a**3)/(a+b)))*(1+cos(2*alfa));

BS2 Jmen_22 = -(MM**2)*(b**2)*((cos(alfa))**2)+(MM+

J_kladka/(r**2))*((MM+m_poh)*(b**2)+(m/3)*((b**3+a**3)/(a+

```

b)));
BS7 Jmen_1 = 1/Jmen_11;
BS8 Jmen_2 = 1/Jmen_22;
:
BS3 u_r1 = 1*(time>=0.2);
BS4 u_r2 = 0.3*(time>=0.3);
BS5 u_r3 = 0;

BT1 Tau_theta_m = cit_theta/jm_theta * u_r1;
BT2 Tau_alfa_m = cit_alfa/jm_alfa * u_r2;
BT3 f_s_m = cit_s/jm_s * u_r3;
BS6 Cor_alfa_theta = 2*MM*b*r*sin(alfa)+((MM+m_poh)*b**2+m/
3*((b**3+a**3)/(a+b)))*sin(2*alfa);

MU1 > @Multiplier dTheta_dt,dAlfa_dt,1;
SU1 > @Summator 2,Tau_theta,3;
prev1 > @Scalor Tau_theta_m,Tau_theta / 75;
prev2 > @Scalor Tau_alfa_m,Tau_alfa / 75;
prev3 > @Scalor f_s_m,f_s / 50;
MU2 > @Multiplier 1,Cor_alfa_theta,2;
MU3 > @Multiplier Jmen_1,3,d2Theta_dt;
MU4 > @Multiplier dTheta_dt,dTheta_dt,d_theta_kvadrat;
MU5 > @Multiplier dAlfa_dt,dAlfa_dt,d_alfa_kvadrat;
BS9 Odst_theta2 = -(MM+J_kladka/(r**2))*(((MM+m_poh)*b**2+
m/3*((b**3+a**3)/(a+b)))*sin(2*alfa)+M*b*r*sin(alfa));
BS10 Odst_alfa = -1/2*(MM**2)*(b**2)*sin(2*alfa);

```

```

BS11 vliv_g2 = 9.81*cos(alfa)*((MM**2)*b-(MM+J_kladka/(r**2))*((MM+m_poh)*
    b+m/2*(a+b)));
SC1 > @Scalor Tau_alfa,4 / (MM+J_kladka/(r**2));
SC2 > @Scalor f_s,5 / MM*b*cos(alfa);
MU6 > @Multiplier Odst_theta2,d_theta_kvadrat,6;
MU7 > @Multiplier Odst_alfa,d_alfa_kvadrat,7;
SU2 > @Summator 6,7,8;
SU3 > @Summator vliv_g2,8,9;
SU4 > @Summator 4,5,10;
SU5 > @Summator 9,10,11;
MU8 > @Multiplier Jmen_2,11,d2Alfa_dt;
BS12 Odst_theta3 = -MM*b*cos(alfa)*(((MM+m_poh)*b**2+m/3*((
    b**3+a**3)/(a+b)))*sin(2*alfa)+M*b*r*sin(alfa));
BS13 vliv_g3 = 9.81*MM*((MM+m_poh)*(b**2)+(m/3)*((b**3+a**3)/(
    a+b))-(b*(cos(alfa))**2)*((MM+m_poh)*b+m/2*(a+b)));
MU9 > @Multiplier d_theta_kvadrat,Odst_theta3,12;
SU6 > @Summator 7,12,13;
SU7 > @Summator 13,vliv_g3,14;
MU10 > @Multiplier 15,Jmen_2,d2s_dt;
SU8 > @Summator 14,10,15;
SC3 > @Scalor alfa,alfa_deg / 180/1pi;
SC4 > @Scalor Theta,Theta_deg / 180/1pi;
*TR;
TR 0 2;
PRINT dTheta_dt, dAlfa_dt, s, ds_dt, Jmen_11, Tau_theta,
    alfa_deg, Theta_deg, Tau_alfa, vliv_g2;

```

INIT I1.out=0, I3.out=0, I5.out=0.2,

Jmen_11=J_sloup+1/2*MM*r**2+MM*b*r*cos(alfa)+1/2*((
MM+m_poh)*b**2+m/3*((b**3+a**3)/(a+b)))*(1+cos(2*alfa)),

Jmen_22=-(MM**2)*(b**2)*(cos(alfa))**2+(MM+
J_kladka/(r**2))*((MM+m_poh)*b**2+m/3*((b**3+a**3)/(a+
b))),

Odst_theta2=-(MM+J_kladka/(r**2))*(((MM+m_poh)*b**2+
m/3*((b**3+a**3)/(a+b)))*sin(2*alfa)+M*b*r*sin(alfa)),

Odst_alfa=-1/2*(MM**2)*(b**2)*sin(2*alfa),

vliv_g2=9.81*cos(alfa)*((MM**2)*b-(MM+J_kladka/(r**2))*((MM+m_poh)*b+m/
2*(a+b)));

RUN MIN=1e6, MAX=1e5, WPRINT=1000;

*END;

Příloha P II: Výpis některých výpočtů z programu Maxima

Výpočet transformačních matic:

```
(%i4) (T_3_1):matrix(
[-cos(alpha),cos(alpha),-sin(alpha),r*cos(alpha)],
[-sin(alpha),0,0,-r*sin(alpha)],
[0,1,0,0],
[0,0,0,1])
;
(%o4)

$$\begin{bmatrix} -\cos(\alpha) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)r \\ -\sin(\alpha) & 0 & 0 & -\sin(\alpha)r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i1) T_2_1: matrix(
[cos(alpha),sin(alpha),0,-b*cos(alpha)],
[-sin(alpha),cos(alpha),0,b*sin(alpha)],
[0,0,1,0],
[0,0,0,1])
;
(T_2_1)

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & -\cos(\alpha)b \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha)b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i1) T1_0: matrix(
[cos(theta),0,sin(theta),0],
[sin(theta),0,-cos(theta),0],
[0,1,0,h],
[0,0,0,1])
;
(T1_0)

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i4) X_kl: matrix(
[0],
[0],
[0],
[1])
;
(X_kl)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i5) T1_0.T_2_1.X_kl;
(%o5)

$$\begin{bmatrix} -\cos(\alpha)b\cos(\theta) \\ -\cos(\alpha)b\sin(\theta) \\ h+\sin(\alpha)b \\ 1 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i7) T_4_3: matrix(
[1,0,0,0],
[0,1,0,0],
[0,0,1,-s],
[0,0,0,1])
;
(T_4_3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i16) Hmota: (%o11).x_M;
(Hmota)

$$\begin{bmatrix} -\frac{b\cos(\theta+\alpha)}{2} - \frac{b\cos(\theta-\alpha)}{2} & -r\cos(\theta) \\ -\frac{b\sin(\theta+\alpha)}{2} - \frac{b\sin(\theta-\alpha)}{2} & -r\sin(\theta) \\ -s+h+\sin(\alpha)b \\ 1 \end{bmatrix}$$

```

(%i12) T_4_0:T1_0.T_2_1.T_3_2.T_4_3:

$$(T_4_0) \begin{bmatrix} (-\sin(\alpha)^2 - \cos(\alpha)^2) \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & (\cos(\alpha) (\sin(\alpha) s - \cos(\alpha) r) + \sin(\alpha) (-\cos(\alpha) s - \sin(\alpha) r) - \cos(\alpha) b) \cos(\theta) \\ (-\sin(\alpha)^2 - \cos(\alpha)^2) \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & (\cos(\alpha) (\sin(\alpha) s - \cos(\alpha) r) + \sin(\alpha) (-\cos(\alpha) s - \sin(\alpha) r) - \cos(\alpha) b) \sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 & -\sin(\alpha) (\sin(\alpha) s - \cos(\alpha) r) + \cos(\alpha) (-\cos(\alpha) s - \sin(\alpha) r) + h + \sin(\alpha) b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i13) trigreduce(T_4_0);

(%o13)

$$\begin{bmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & -\frac{b \cos(\theta + \alpha)}{2} - \frac{b \cos(\theta - \alpha)}{2} - r \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & -\frac{b \sin(\theta + \alpha)}{2} - \frac{b \sin(\theta - \alpha)}{2} - r \sin(\theta) \\ 0 & 0 & \frac{\cos(2\alpha) + 1}{2} + \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} & -s + h + \sin(\alpha) b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Příloha P III: Obecné řešení inverzní úlohy pro více stupňů volnosti

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & -\frac{1}{2}((b(\cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta - \alpha)) + 2r\cos(\theta))) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & -\frac{1}{2}((b(\sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta - \alpha)) + 2r\cos(\theta))) \\ 0 & 0 & 1 & h + b\sin(\alpha) - s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -r\cos(\theta) - b\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ -r\sin(\theta) - b\sin(\theta)\cos(\alpha) \\ h + b\sin(\alpha) - s \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pro úhel α postupujeme následovně - rovnici 1 a 2 umocníme a sečteme

$$x_M^2 = (-\cos(\theta)(r + b\cos(\alpha)))^2$$

$$y_M^2 = (-\sin(\theta)(r + b\cos(\alpha)))^2$$

$$x_M^2 + y_M^2 = (r + b\cos(\alpha))^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))$$

$$x_M^2 + y_M^2 = (r + b\cos(\alpha))^2$$

$$\pm\sqrt{x_M^2 + y_M^2} = (r + b\cos(\alpha))$$

$$\cos(\alpha) = \pm \frac{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{b} - \frac{r}{b}$$

$$\text{takže } \alpha = \arccos\left(\pm \frac{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{b} - \frac{r}{b}\right)$$

$$\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$$

$$\sin(\alpha) = \pm \sqrt{1 \pm \left(\frac{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{b} - \frac{r}{b}\right)^2}$$

Pro s :

$$s = h + b\sin(\alpha) - z_M$$

$$s = h + b \sqrt{1 \pm \left(\frac{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{b} - \frac{r}{b}\right)^2} - z_M$$

$$s = h + \sqrt{b^2 \pm (\sqrt{x_M^2 + y_M^2} - r)^2 - z_M}$$

Pro výpočet úhlu θ :

$$x_M = -r \cos(\theta) - b \cos(\theta) \cos(\alpha) = -\cos(\theta)(r + b \cos(\alpha))$$

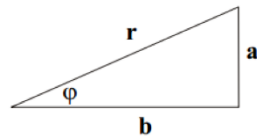
$$y_M = -r \sin(\theta) - b \sin(\theta) \cos(\alpha) = -\sin(\theta)(r + b \cos(\alpha))$$

Pro výpočet θ první rovnici vynásobíme $\cos(\varphi)$ a druhou $\sin(\varphi)$

A zavedeme substituci:

Obrázek 11 Vztahy mezi φ , r , a , b

$$a = r \cdot \sin(\varphi); b = r \cdot \cos(\varphi)$$



Zdroj: vlastní tvorba

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Tedy: $a = x_h$, $b = y_h$,

Dostaneme:

$$x_M \cos(\varphi) = (-r \cos(\theta) - b \cos(\theta) \cos(\alpha)) \cos(\varphi)$$

$$y_M \sin(\varphi) = (-r \sin(\theta) - b \sin(\theta) \cos(\alpha)) \sin(\varphi)$$

Rovnice sečteme:

$$\begin{aligned} x_M \cos(\varphi) + y_M \sin(\varphi) &= (-r \cos(\theta) - b \cos(\theta) \cos(\alpha)) \cos(\varphi) \\ &\quad + (-r \sin(\theta) - b \sin(\theta) \cos(\alpha)) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_M \cos(\varphi) + y_M \sin(\varphi) &= -r \cos(\theta) \cos(\varphi) - b \cos(\theta) \cos(\alpha) \cos(\varphi) \\ &\quad - r \sin(\theta) \sin(\varphi) - b \sin(\theta) \cos(\alpha) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_M \cos(\varphi) + y_M \sin(\varphi) \\
= & -r(\cos(\theta) \cos(\varphi) + \sin(\theta) \sin(\varphi)) - b \cos(\alpha) (\cos(\theta) \cos(\varphi) \\
& + \sin(\theta) \sin(\varphi))
\end{aligned}$$

$$x_M \cos(\varphi) + y_M \sin(\varphi) = (\cos(\theta) \cos(\varphi) + \sin(\theta) \sin(\varphi))(-r - b \cos(\alpha))$$

Pomocí vztahu: $\cos(\theta - \varphi) = \cos(\theta) \cos(\varphi) + \sin(\theta) \sin(\varphi)$

$$x_M \cos(\varphi) + y_M \sin(\varphi) = \cos(\theta - \varphi) (-r - b \cos(\alpha))$$

$$\cos(\theta - \varphi) = \frac{x_M \cos(\varphi) + y_M \sin(\varphi)}{(-r - b \cos(\alpha))}$$

$$\cos(\theta - \varphi) = \frac{x_M \frac{y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}} + y_M \frac{x_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}}{(-r - b(\pm \frac{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{b} - \frac{r}{b}))}$$

$$\cos(\theta - \varphi) = \frac{x_M \frac{y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}} + y_M \frac{x_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}}{(-r \pm \sqrt{x_M^2 + y_M^2} + r)}$$

$$\cos(\theta - \varphi) = \frac{x_M \frac{y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}} + y_M \frac{x_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}}{(-r \pm \sqrt{x_M^2 + y_M^2} + r)}$$

$$\cos(\theta - \varphi) = \pm 2x_M y_M$$

$$(\theta - \varphi) = \arccos(\pm 2x_M y_M)$$

$$\theta = \arccos(\pm 2x_M y_M) + \arcsin \frac{x_h}{\sqrt{x_h^2 + y_h^2}}$$

A postupným řešením – nejdříve určíme α , φ a pak dosazením s a φ vypočteme θ

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{b} - \frac{r}{b}\right)$$

$$\varphi = \arcsin \frac{x_h}{\sqrt{x_h^2 + y_h^2}}$$

$$s = h + \sqrt{b^2 \pm (\sqrt{x_M^2 + y_M^2} - r)^2 - z_M}$$

$$\theta = \arccos(\pm 2x_M y_M) + \arcsin \frac{x_h}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}$$

Příloha P IV: Výpis programu robotického ramene v programu Dynast

(s regulací)

Program DYNAST started on May 8, 2019 at 20:16:41

```
*: Robot
*SYSTEM;
a=0.3;b=1.2;sirka=0.07;vyska=0.05;r=0.075;J_sloup=5e-2;m=3500*(sirka*vyska*(a+b));MM=2;m_poh=2;;Parametry
m_kladka=7800*(1pi*r**2*0.05);J_kladka=1/2*m_kladka*r**2;
:
cit_theta /POLY/ 1;
jm_theta /POLY/ 1,1/(2pi*100);
cit_alfa /POLY/ 1;
jm_alfa /POLY/ 1,1/(2pi*100);: Přenosy
cit_s /POLY/ 1;
jm_s /POLY/ 1,1/(2pi*100);
:
I1 > @Int dTheta_dt,Theta;
I2 > @Int d2Theta_dt,dTheta_dt;
I3 > @Int dAlfa_dt,alfa;
I4 > @Int d2Alfa_dt,dAlfa_dt;
I5 > @Int ds_dt,s;
I6 > @Int d2s_dt,ds_dt;
BS1 Jmen_11 = J_sloup+1/2*MM*r**2+MM*b*r*cos(alfa)+1/2*((
  MM+m_poh)*b**2+m/3*((b**3+a**3)/(a+b)))*(1+cos(2*alfa));
BS2 Jmen_22 = -(MM**2)*(b**2)*(cos(alfa))**2+(MM+J_kladka/(
```

```

r**2))*((MM+m_poh)*b**2+m/3*((b**3+a**3)/(a+b)));
BS7 Jmen_1 = 1/Jmen_11;
BS8 Jmen_2 = 1/Jmen_22;
:
BS3 u_r1 = u_r_theta/5;
BS4 u_r2 = u_r_alfa/1;
BS5 u_r3 = 0;

BT1 Tau_theta_m = cit_theta/jm_theta * u_r1;
BT2 Tau_alfa_m = cit_alfa/jm_alfa * u_r2;
BT3 f_s_m = cit_s/jm_s * u_r3;
BS6 Cor_alfa_theta = 2*MM*b*r*sin(alfa)+((MM+m_poh)*b**2+m/
3*((b**3+a**3)/(a+b)))*sin(2*alfa);

MU1 > @Multiplier dTheta_dt,dAlfa_dt,1;
SU1 > @Summator 2,Tau_theta,3;
prev1 > @Scalor Tau_theta_m,Tau_theta / 75;
prev2 > @Scalor Tau_alfa_m,Tau_alfa / 133;
prev3 > @Scalor f_s_m,f_s / 50;
MU2 > @Multiplier 1,Cor_alfa_theta,2;
MU3 > @Multiplier Jmen_1,3,d2Theta_dt;
MU4 > @Multiplier dTheta_dt,dTheta_dt,d_theta_kvadrat;
MU5 > @Multiplier dAlfa_dt,dAlfa_dt,d_alfa_kvadrat;
BS9 Odst_theta2 = -(MM+J_kladka/(r**2))*(((MM+m_poh)*b**2+
m/3*((b**3+a**3)/(a+b)))*sin(2*alfa)+M*b*r*sin(alfa));
BS10 Odst_alfa = -1/2*(MM**2)*(b**2)*sin(2*alfa);

```

BS11 $v_{liv_g2} = ((MM^{**2}) * b - (MM + J_kladka / (r^{**2})) * ((MM + m_poh) * b + m / 2 * (a + b))) * 9.81 * \cos(\alpha);$
 SC1 > @Scalor Tau_alfa,4 / (MM+J_kladka/(r**2));
 SC2 > @Scalor f_s,5 / MM*b*cos(alfa);
 MU6 > @Multiplier Odst_theta2,d_theta_kvadrat,6;
 MU7 > @Multiplier Odst_alfa,d_alfa_kvadrat,7;
 SU2 > @Summator 6,7,8;
 SU3 > @Summator vliv_g2,8,9;
 SU4 > @Summator 4,5,10;
 SU5 > @Summator 9,10,11;
 MU8 > @Multiplier Jmen_2,11,d2Alfa_dt;
 BS12 $Odst_theta3 = -MM * b * \cos(\alpha) * (((MM + m_poh) * b^{**2} + m / 3 * ((b^{**3} + a^{**3}) / (a + b))) * \sin(2 * \alpha) + M * b * r * \sin(\alpha));$
 BS13 $v_{liv_g3} = 9.81 * MM * ((MM + m_poh) * b^{**2} + m / 3 * ((b^{**3} + a^{**3}) / (a + b)) - (b * (\cos(\alpha))^{**2}) * ((MM + m_poh) * b + m / 2 * (a + b)));$
 MU9 > @Multiplier d_theta_kvadrat,Odst_theta3,12;
 SU6 > @Summator 7,12,13;
 SU7 > @Summator 13,vliv_g3,14;
 MU10 > @Multiplier 15,Jmen_2,d2s_dt;
 SU8 > @Summator 14,10,15;
 SC3 > @Scalor alfa,alfa_deg / 180/1pi;
 SC4 > @Scalor Theta,Theta_deg / 180/1pi;
 BS14 Theta_ref = 5;
 BS15 alfa_ref = 3*(time>=0.7);
 SC5 > @Scalor 16,17 / 10/20;
 SC6 > @Scalor 18,19 / 10/20;

```

DF1 > @Difference Theta_ref,Theta_deg,16;
DF2 > @Difference alfa_ref,alfa_deg,18;
PID_contr1 > @PID_contr 17,u_r_theta / K=25,TAU=3e-1,
    KD=1.35;
PID_contr2 > @PID_contr 19,u_r_alfa / K=40,TAU=1e-2,KD=0.52;
*TR;
TR 0 1.5;
PRINT(5001) dTheta_dt, dAlfa_dt, s, ds_dt, Jmen_11, Tau_theta, alfa_deg, Theta_deg,
Tau_alfa, vliv_g2, Theta_ref, alfa_ref, u_r_alfa;
INIT          I1.out=0,          I3.out=0,          I5.out=0.2,
Jmen_11=J_sloup+1/2*MM*r**2+MM*b*r*cos(alfa)+1/2*((
    MM+m_poh)*b**2+m/3*((b**3+a**3)/(a+b))*(1+cos(2*alfa)),          Jmen_22=-
(MM**2)*(b**2)*(cos(alfa))**2+(MM+
    J_kladka/(r**2))*((MM+m_poh)*b**2+m/3*((b**3+a**3)/(a+
    b))), Odst_theta2=-(MM+J_kladka/(r**2))*((MM+m_poh)*b**2+
    m/3*((b**3+a**3)/(a+b))*sin(2*alfa)+M*b*r*sin(alfa)),          Odst_alfa=-
1/2*(MM**2)*(b**2)*sin(2*alfa),
    vliv_g2=((MM**2)*b-(MM+J_kladka/(r**2))*((MM+m_poh)*
    b+m/2*(a+b)))*9.81*cos(alfa), s=0.1;
RUN MIN=1e6, MAX=5e4, WPRINT=1000;
*END;

```

