Kristína Ovary Bulková, Janka Medová, Soňa Čeretková, Anna Tirpáková

HODNOCENÍ MATEMATICKÝCH KOMPETENCÍ PŘI ŘEŠENÍ OTEVŘENÝCH MATEMATICKÝCH PROBLÉMŮ

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta humanitních studií

PDF kniha

Univerzita Tomáše Bati
Fakulta humanitních studií

Kristína Ovary Bulková, Janka Medová,
Soňa Čeretková, Anna Tirpáková

HODNOCENÍ MATEMATICKÝCH KOMPETENCÍ PŘI ŘEŠENÍ OTEVŘENÝCH MATEMATICKÝCH PROBLÉMŮ

Univerzita Tomáše Bati
Fakulta humanitních studií

KATALOGIZACE V KNIZE - NÁRODNÍ KNIHOVNA ČR

Ovary Bulková, Kristína
Hodnocení matematických kompetencí při řešení otevřených matematických problémů /
Kristína Ovary Bulková, Janka Medová, Soňa Čeretková, Anna Tirpáková. --
Pořadí vydání: první, vydáno elektronicky. -- Ve Zlíně : Univerzita Tomáše Bati,
Fakulta humanitních studií 2021. -- 1 online zdroj
Anglické resumé
Obsahuje bibliografii

ISBN 978-80-7678-045-3 (online ; pdf)

* 51 * 37.016.026 * 37.015.31:51 * 37.011/.012 * (048.8:082)
– matematika
– předmětová didaktika
– matematická gramotnost
– pedagogická evaluace
– otevřené problémy (matematika)
– kolektivní monografie

51 - Matematika [13]

Univerzita Tomáše Bati
Fakulta humanitních studií

Autoři:

PaedDr. Kristína Ovary Bulková, PhD. – Ústav školní pedagogiky,
Fakulta humanitních studií, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

doc. PaedDr. Janka Medová, PhD. – Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied,
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Slovenská republika

doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD. – Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied,
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Slovenská republika

prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc. – Ústav školní pedagogiky,
Fakulta humanitních studií, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Grafická úprava a sazba: Nakladatelství UTB

Foto na obálce: Lubo Balko

Vydavatel: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2021

Pořadí vydání: První

Vydáno elektronicky

Vědecký redaktor: **prof. RNDr. Michal Munk, PhD.**

Recenzenti: **prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.**
doc. PaedDr. Gabriela Pavlovičová. PhD.

ISBN 978-80-7678-045-3

ANOTACE

Otevřené matematické problémy v analýze představují prostředek pro pozorování nejen konceptuálních, ale i procedurálních vědomostí žáků. Vzhledem na širokou škálu možností pro řešení otevřeného matematického problému není dopředu jasný řešitelský postup žáků. Při hodnocení se tak klade důraz samozřejmě na správnost výsledku, ale taktéž na provedení postupu písemného řešení. Hodnocení řešení žáků otevřených matematických problémů tak bývá silně ovlivněno subjektivním názorem hodnotitele. Cílem publikace je tak identifikace a analýza projevených matematických kompetencí žáků v písemných řešeních otevřených matematických problémů žáků pro vytvoření universálního nástroje pro hodnocení písemných řešení žáků. Právě identifikace matematických kompetencí žáků je klíčová pro vytvoření potřebného nástroje. Za vhodný hodnotící nástroj byla využita rubrika jako hodnotící tabulka. Základ pro hodnocení matematických kompetencí bude tvořen prostřednictvím šesti úrovní dimenze kognitivních procesů Revidované Bloomove taxonomie vzdělávacích cílů. Popis šesti úrovní pro rubriky pro hodnocení matematických kompetencí v písemných řešeních žáků je vytvořen pro atributy jako písemný projev žáků a míra kreativity v manifestovaných písemných řešeních žáků. V publikaci je podrobně popsaný postup tvorby systému rubrik jako i popis úrovní pro všechny vybrané atributy. Jejich aplikace je ukázaná na autentických řešeních žáků v soutěži s názvem Matematický B-day, a taktéž na řešeních otevřených matematických problémů budoucích učitelů pro primární vzdělávání.

OBSAH

ÚVOD

S neustálym a stále zrýchľujúcim sa vývojom spoločnosti sa menia trendy aj vo výchovno-vzdelávacom procese. Mnohé súčasné štúdie na poli pedagogiky aj odborových didaktík sa zameriavajú na potrebu rozvoja takých kľúčových kompetencií, ktoré sú dôležité pre plnohodnotné zaradenie jednotlivca na dynamickom trhu práce. Vo všeobecnosti, jedným z hlavných cieľov vzdelávania je príprava žiakov, respektíve študentov, na vstup do života tak, aby boli schopní zvládnuť náročné a zložité problémy. Je tiež dôležité, aby naše vzdelávacie systémy začlenili zručnosti 21. storočia do výchovno-vzdelávacieho procesu (Häkkinen et al., 2017). V súčasnosti sa kladie silný dôraz aj na podporu motivácie získavať nové vedomosti a zručnosti.

Vo vyučovaní matematiky sa do popredia dostávajú konštruktivisticky ladené vyučovacie koncepcie, medzi ktoré patrí aj objavné vyučovanie. Jedným z nástrojov pre uplatňovanie objavného vyučovania v matematike sú také matematické problémy, ktoré môžu mať rôznu mieru otvorenosti. Vzhľadom na širokú škálu možností pre riešenie otvorených matematických problémov nie je dopredu jasný riešiteľský postup žiakov. Pri hodnotení sa tak kladie dôraz nielen na správnosť výsledku, ale tiež na uvedenie postupu riešenia do písomného popisu jeho jednotlivých krokov. Hodnotenie takýchto písomných žiackych riešení môže častokrát byť silne ovplyvnené subjektívnym názorom hodnotiteľa.

Hlavným cieľom výskumu prezentovaného v publikácii je vytvorenie univerzálneho nástroja pre hodnotenie písomných žiackych riešení otvorených matematických problémov. Z položeného cieľa vyplýva niekoľko čiastkových cieľov:

- Analyzovať písomné žiacke riešenia otvorených matematických problémov.
- Na základe analýzy písomných žiackych riešení identifikovať atribúty kvality písomného riešenia otvorených matematických problémov prostredníctvom prejavených matematických kompetencií.

- Na základe analýzy písomných žiackych riešení otvorených matematických problémov určiť mieru matematickej správnosti riešenia a úroveň prejavených atribútov kreativity.
- Vytvoriť kritériá na hodnotenie písomných žiackych riešení otvorených matematických problémov.

Publikácia je rozdelená do piatich hlavných kapitol. Prvá kapitola predstavuje široký teoretický rámec kľúčových pojmov, ku ktorým patria: otvorené matematické problémy, objavné vyučovanie, matematické kompetencie, písomný prejav žiakov a kreativita v matematike. Taktiež obsahuje popis možností formatívneho hodnotenia žiackych riešení neštandardných, a teda otvorených matematických problémov. Vo formatívnom hodnotení sa kladie dôraz a význam využívania rubrík, ktoré majú formu hodnotiacej tabuľky.

Výskumná časť je rozdelená do troch kapitol. Najprv je popísaná metodológia výskumu, teda podrobný proces tvorby hodnotiaceho nástroja pre riešenie otvorených matematických problémov. Účastníkmi výskumu boli žiaci, ktorí sa zapojili do tímovej súťaže Matematický B-deň, pričom ich písomné riešenia boli analyzované z piatich ročníkov súťaže. Nasleduje ukážka aplikácie vytvorených rubrík v praxi, pri hodnotení otvorených matematických problémov a to opäť na riešeniach žiakov súťaže Matematický B-deň, ale aj na riešeniach vybraných úloh Matematickej olympiády študentmi učiteľstva pre primárne vzdelávanie. Zistenia výskumu sú následne diskutované s dostupnou literatúrou.

1/
OTVORENÉ MATEMATICKÉ PROBLÉMY A OBJAVNÉ VYUČOVANIE V MATEMATIKE

Do popredia sa stále viac dostáva objavné vyučovanie, kde žiaci dostávajú priestor riešiť matematické problémy s otvorenou možnosťou stratégie a upevniť si tak viac vlastné matematické vedomosti a zručnosti. Objavné vyučovanie predstavuje veľmi frekventovanú tému rôznych súčasných výskumov a diskusií, a to nielen v rámci teórie vyučovania matematiky.

Aj keď sa v posledných rokoch vo výchovno-vzdelávacom procese upúšťa od štandardného memorovania nových vedomostí, jedným z problémov vo vyučovaní matematiky je pohľad na matematiku ako na skupinu nepochopiteľných a izolovaných faktických vedomostí, ktoré je potrebné si pamätať len pri písomných testoch (Bergqvist & Lithner, 2005). Dnes sa však od rutinného opakovania zaužívaných algoritmov a postupov výpočtov pomaly upúšťa. Je pravda, že skutočnosť, že sú žiaci tradičným vyučovaním, cielene vedení k uchopeniu konkrétnych algoritmov pri riešení štandardných matematických úloh, predovšetkým viacnásobným opakovaním algoritmov, môže žiakom, v riešiteľskom procese, poskytnúť istú formu stability. Avšak je potrebné si uvedomiť, že žiaci sú tým ochudobnení o možnosť o probléme premýšľať, analyzovať a diskutovať možnosti rôznych riešiteľských stratégií, odlišných foriem riešenia a dokonca i prehlbovania iných zručností potrebných pre riešenie matematických problémov (Krejčová, 2013). Udržovanie tradičného vyučovania matematiky má za príčinu, že žiaci ostávajú pasívni a závislí na učiteľovi a jeho pokynoch (Kocak, et al., 2009) a spoliehajú na netvorivé, respektíve naučené postupy, ktoré možno označiť pojmom matematicky povrchné stratégie (Bergqvist & Lithner, 2005; Havlíčková, 2020).

Všeobecne vo vyučovaní matematiky platí, že matematická úloha predstavuje činnosť, pri riešení ktorej žiak aplikuje skôr naučené stratégie. Slovná úloha môže byť definovaná ako slovný popis určitej situácie ukončený otázkou, na ktorú možno zodpovedať cez prepojenie zadaných údajov aplikáciou matematických operácií (Verschaffel et. al, 2000). Úloha sa stáva problémom, ak riešiteľ nespozná riešiteľskú stratégiu okamžite, ale musí hľadať nové cesty a stratégie k riešeniu daného problému (problem solving). Žiakovi nie je zadaním úlohy naznačené, aby použil nejaký konkrétny procedurálny alebo algoritmický nástroj na jej riešenie. Problém tak predstavuje výzvu pre budovanie nového nástroja na základe vlastných vedomostí a skúseností (Powel et al., 2009). Navyše, to isté zadanie môže byť použité ako problém, úloha, či cvičenie. Záleží na vyučujúcom, aby zhodnotil formu či formuloáciu zadania, vzhľadom na vedomosti riešiteľa alebo vzhľadom na fázu vyučovacej hodiny, v ktorej bude úloha použitá. Schoenfeld (1992) definuje problém ako úlohu, ktorá je pre riešiteľa nová. V každom probléme musí byť niečo nové, v opačnom prípade nie je dôvod niečo hľadať alebo riešiť. Na druhej strane však musí byť v zadaní problému aj niečo známe, aby bolo možné rozoznať a identifikovať podstatu problému. Údaje, ktoré sú zadané sú prepojené s tým, čo sa má hľadať, v zadaní vyjadrenou, určenou podmienkou (Pólya & Conway, 1957).

Henderson & Pingry (1953) stanovili tri základné charakteristiky, aby daná situácia bola pre žiaka skutočne problémová:

1. Existuje jasne definovaný cieľ, ktorý by sa mal žiak pokúsiť dosiahnuť.
2. Cesta k cieľu je blokovaná, pričom doposiaľ nadobudnuté vedomosti, zručnosti a návyky žiaka nepostačujú na jej uvoľnenie.
3. Žiak si uvedomí problém (pomenuje „blok“), definuje ho, nájde možné hypotézy (riešenia) a overí možnosť ich využitia.

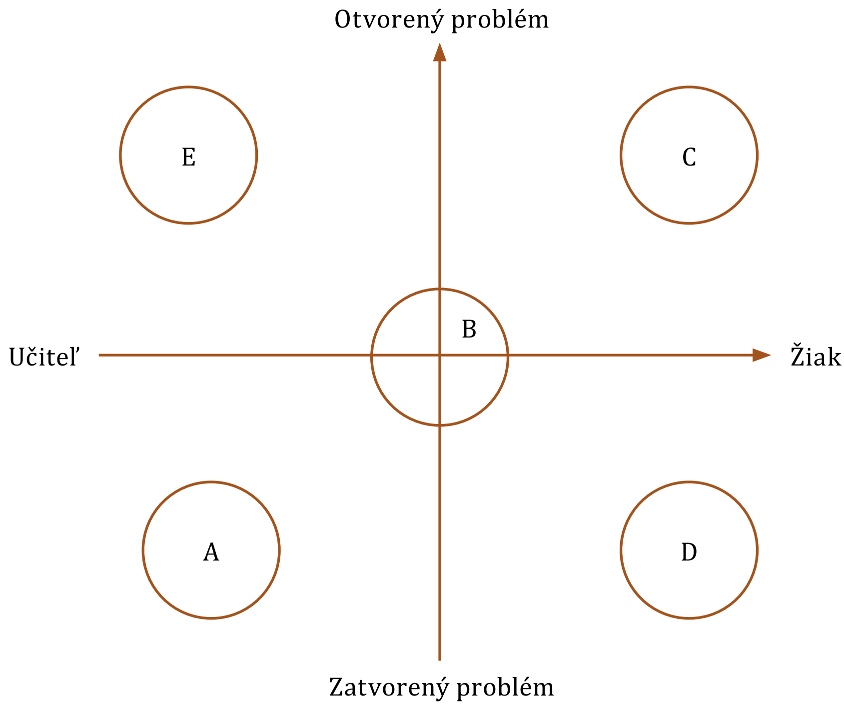
Inými slovami, žiak by mal chcieť danú úlohu riešiť (bod 1), nemal by byť schopný ju vyriešiť priamo prostredníctvom už známych postupov (bod 2) a mal by sa dostať k vhodnému návrhu riešenia (bod 3).

Formulovanie úloh a problémov v jednotlivých tematických celkoch matematiky je vo vyučovaní matematiky stále aktuálnou témou a venujú sa jej mnohé súčasné štúdie. Existuje mnoho interpretácií rozdielu medzi úlohou a problémom a teda aj niekoľko náhľadov na ich kategorizáciu.

Lock (1990) uvádza takúto kategorizáciu problémov s ohľadom miery interakcie učiteľa prostredníctvom pravouhlej súradnicovej sústavy (obrázok 1.1). Horizontálna os diagramu znázorňuje mieru riadenia riešenia problému učiteľom, oproti tomu, do akej miery je riešenie problému ponechané na kontrole žiakom samotným.

Vertikálna os diagramu vymedzuje mieru otvorenosti problému od problémov s uzatvorenou cestou a uzatvoreným cieľom po problémy s otvoreným zadaním.

Obrázok 1.1: *Diagram klasifikácie problémov na pravuhlej osovej súradnici*

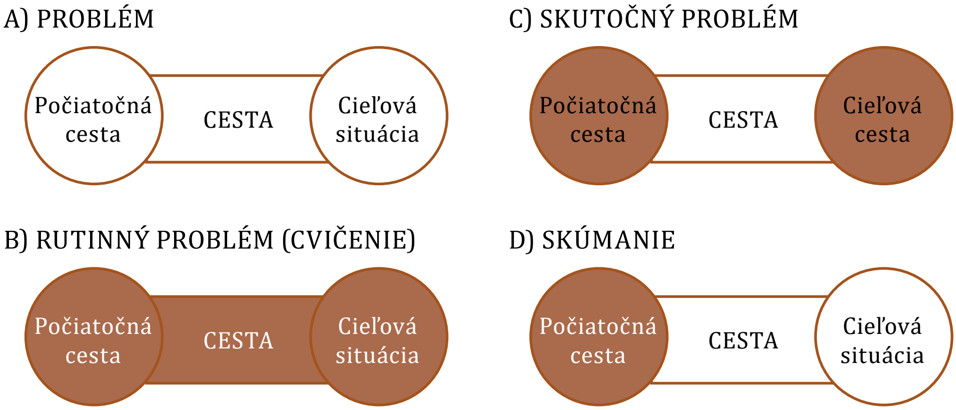


Lock (1990)

V uvedenom diagrame možno špecifikovať šesť označených pozícií (A–F) v závislosti od povahy problému. Najskôr si popíšeme jednotlivé kvadranty označené pozíciami A, C, D, E. Základná úroveň rutinných problémov, ktorých cieľom je upevnenie učiva alebo určitého algoritmu, je označená pozíciou A. Tieto problémy majú uzatvorený charakter a ich riešiteľský postup je riadený učiteľom. Naproti tomu, pozícia C predstavuje otvorené problémy, ktoré sú zamerané priamo na voľbu stratégie riešenia žiakmi, teda problémy s otvoreným cieľom. Pozícia C predstavuje problémy, na ktorých riešení žiak pracuje samostatne bez interakcie učiteľa a s otvorenou možnosťou voľby stratégie riešenia. Na druhej strane, aj problémy s uzatvoreným koncom môžu byť orientované na žiaka bez učiteľovej participácie. Jedná sa o problémy označených pozíciou D, ktoré sú zamerané napríklad na overenie platnosti výsledku alebo záveru. Učiteľ pritom môže žiakom povedať návrh stratégií pre riešenie problému. Ďalej, učiteľ pri problémoch, ktoré reprezentujú pozíciu E, necháva žiakom priestor pre premýšľanie o využití rôznych stratégií. Na druhej strane však zasahuje do ich riešenia so zámerom, aby žiaci v rámci svojho riešenia dospeli k správnemu matematickému výsledku. Ostávajú ešte dve špeciálne pozície, ktoré nie sú lokalizované v kvadrantoch diagramu. Pozícia B predstavuje špeciálny prístup v riešení problémov na hodinách matematiky. V diagrame sa táto pozícia nachádza v priesečníku osí. Učiteľ žiakom problém predstaví a, prípadne, uvedie situáciu problému ako otvoreného problému, avšak ďalej zasahuje do činnosti žiakov prostredníctvom otázok, ktorými žiakov navádza k požadovaným, respektíve očakávaným, stratégiám riešenia zadaného problému. Inak povedané, na základe pozorovania a interakcie učiteľa, prostredníctvom vhodných otázok, môžu žiaci nachádzať a interpretovať svoje výsledky, ktoré sú učiteľovi od začiatku známe. Nakoniec, pozíciou F sa vraciame späť k rutinným problémom s uzavretým cieľom, s tým, že prebieha interakcia medzi učiteľom a žiakom pri špecifikácii vybranej stratégie riešenia problému.

Medzi otvorenými matematickými problémami a bežnými uzatvorenými, štandardnými, rutinnými, úlohami môžeme pozorovať viacero odlišností: či sa jedná o formuláciou problému alebo o požadovanú interpretáciu riešenia od riešiteľov. Už zadanie samotné môže indikovať mieru otvorenosti problému. Svojou podstatou sa viac približujú k reálnej situácii, prostredníctvom ktorej je riešiteľ vyzvaný k tvoreniu odpovede (Novotná, 2010). Úrovne popisujúce prechod k matematickému problému možno rozlíšiť nasledovne: problémy s uzavretou cestou a uzavretým cieľom (nazývané aj ako rutinn é), problémy s otvorenou cestou a uzavretým cieľom (označované vo všeobecnosti ako nerutinné), problémy s otvorenou cestou a otvoreným cieľom a problémy s otvoreným zadaním, otvorenou cestou a otvoreným cieľom (Čeretková et al. 2017).

Obrázok 1.2: *Grafické znázornenie typológie problémov prostredníctvom trojfázových diagramov*



Kopka (2010)

Kopka (2010) uvádza podobné grafické rozdelenie úrovne otvorenosti problémov (obrázok 1.2). Znázornené štyri úrovne ukazujú tri zložky problému: počiatočná situácia – cesta – cieľová situácia. Farebná výplň znamená, že daná zložka je uzatvorená.

Rutinné problémy, podľa diagramu B, pritom nie sú problémy v pravom slova zmysle, pokiaľ sa jedná o využívanie známych algoritmov. V tom prípade ich prirovnáva skôr k cvičeniam. V riešení nerutinných problémov je stratégia riešenia v obsahu problému skrytá (Cígler, 2018). Pritom všeobecný problém má podľa diagramu A úplne otvorené zadanie a skutočný problém, podľa diagramu C, predstavujú nerutinné problémy s otvoreným výberom stratégie riešenia.

Keď si to zhrnieme, zadanie otvoreného matematického problému má mať formu súvislého matematického textu, v ktorom žiaci majú objavovať matematické prvky, vzťahy a princípy. V porovnaní so štandardnými úlohami, respektíve rutinnými problémami, kde je vyžadovaná len konkrétna vedomosť algoritmov, riešenie problémov, ktoré sú definované ako otvorené, sa odvíja od matematických skúseností a využitia vyšších matematických zručností riešiteľa (Zhouf, 2010).

Oproti problémom s uzatvoreným koncom, ktorých postup riešenia i riešenie samotné boli určené už pred jeho zadaním (Lock, 1990), môže byť otvorený matematický problém tiež definovaný ako problém s tvorbou odpovede (Zhouf, 2010). V závislosti od otvorenosti zadania, vyžaduje takáto odpoveď od riešiteľov neštandardný prístup k riešeniu. Finálna kvalita samotného riešenia sa odvíja nielen od schopností samotných riešiteľov a výberu stratégií ich riešenia, ako je už uvedené v predchádzajúcej podkapitole, ale aj od typu riešeného matematického problému. Proces riešenia otvorených matematických problémov, a teda problémov s otvoreným cieľom, môže mať tak aj formu matematického skúmania (Zhouf, 2010; Čeretková, 2017).

Inak povedané: v oblasti riešenia matematických problémov sa ukazuje zrejmá snaha kategorizovať úlohy na základe rôznych premenných, následne vyjadriť náročnosť problému ako funkciu identifikovaných či zvolených premenných (Kilpatrick, 1978). Dnes však panuje všeobecná zhoda, že náročnosť problému závisí hlavne na charakteristike osoby, ktorá problém rieši (Chan & Clarke, 2017). Dôležité sú vedomosti riešiteľa, jeho schopnosti (napríklad: priestorová predstavivosť, logické uvažovanie, kombinatorické myslenie, a i.), predchádzajúce skúsenosti, ale aj motivácia. Práve motivácia je dôležitou súčasťou pre ochotu a pozitívny postoj riešiteľa, žiaka, študenta, k riešeniu problémových situácii v matematike (Havlíčková, 2020). Úspešné riešenie problému závisí aj na chápaní, kedy a ako využiť príslušnú vedomosť a na schopnosti sledovať a vyhodnocovať použitie danej vedomosti v priebehu i po jej využití v danom riešení, v demonštrovanom riešiteľskom postupe (Lester, 1985).

Stále viac sa kladie dôraz na reprezentáciu matematiky ako ľudskej činnosti, nie ako na učenie sa hotového produktu. Túto myšlienku, v spojitosti s vyučovaním matematiky, presadzoval Hans Freudenthal (1905–1990). Bol zástancom implementácie tzv. opätovného objavovania do matematického vzdelávania, čo pre žiakov predstavovalo hľadanie možností a stratégií pre riešenie problémov. Prostredníctvom vyučovania matematiky, ako organizovanej aktivity, prostredníctvom matematizácie reálnych objektov, spojil Freudenthal do jednej koncepcie „rýdzu" a aplikovanú matematiku. Práve pri využívaní reálneho obsahu v matematike je potrebné správne usporiadanie starých aj nových vedomostí, výsledkov alebo myšlienok do širšieho kontextu, pre hlbšie pochopenie matematickej podstaty (Gravemeijer & Terwel, 2000).

Hans Freudenthal pôsobil na Inštitúte pre rozvoj matematického vzdelávania na univerzite v Utrechte (*Institute for the Development of Mathematical Education*), ktorý bol následne na jeho počesť premenovaný na Freudenthalov inštitút (*Freudenthal Institute*). Súčasné zameranie inštitútu naďalej pokračuje v rozvoji metód efektívneho vyučovania, konkrétne pre podporu budovanie vedeckej a matematickej gramotnosti ako dôležitého základu vzdelaného občana. Výskumné ciele Freudenthalovho inštitútu sú vo všeobecnosti formulované taktiež v súlade s definíciou kompetencií potrebných pre spoločnosť v 21. storočí, a to nasledovne (Universiteit Utrecht: www.uu.nl): skúmať potreby ľudí z rôznych prostredí v spoločnosti z hľadiska matematickej a vedeckej gramotnosti, navrhovať formálne a neformálne situácie v oblasti výchovno-vzdelávacieho procesu orientované na využívanie prostriedkov IKT a pre podporu učiteľov a študentov pri budovaní vedeckej a matematickej gramotnosti. Hlavnou doménou výskumu Freudenthalovho inštitútu je špecifická teória výučby pomenovaná realistické vyučovanie matematiky (*Realistic Mathematics Education – RME*). Už podľa názvu možno predpokladať, že koncepcia RME využíva realistické situácie pre formulovanie matematických problémov, teda situácie, ktoré sú si žiaci schopní predstaviť. Práve riešenie problému s realistickým kontextom poskytuje žiakom možnosť aplikovať získané matematické znalosti, a poskytuje priestor pre vývoj vlastných matematických konceptov a nástrojov u žiakov (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020).

Objavné vyučovanie alebo bádateľsky orientované vyučovanie (Inquiry Based Learning – IBL) je jednou z najčastejšie implementovaných aktivizujúcich metód vyučovania, ktorá je orientovaná na činnosť žiakov (Häkkinen, 2017). Svojou podstatou vychádza z viacerých prístupov. Zaradenie objavovania a bádania, ako súčasti práce vedcov, do vyučovania je v súlade s konštruktivistickým prístupom k vyučovaniu. Konštruktivistické teórie vychádzajú z predpokladu, že vedomosť je neprenosná, zapamätanie nemusí znamenať aj vedomosť a poznatok je aktívne konštruovaný počas procesu učenia v mysli učiaceho sa. Poznávací proces prebieha dlhodobo a je ovplyvnený predchádzajúcou skúsenosťou žiaka, či už zo školského alebo mimoškolského prostredia, pričom je silne ovplyvnený jeho sociálnym prostredím (Jančařík, 2013). Základ teda predstavuje konštruktivizmus, ale objavné vyučovanie čerpá aj z problémového vyučovania, teórie didaktických situácií, realistického vyučovania matematiky (Janečková & Čeretková, 2015). Ústredným, kľúčovým, pojmom je objavovanie, ktoré možno charakterizovať pomocou ďalších aktívnych slovies: klásť otázky, skúšať, skúmať, uvažovať, identifikovať problémy a hľadať riešenia, a kriticky hodnotiť problém (Jaworski, 2006), systematicky pozorovať, hľadať informácie a vhodné zdroje, porovnávať výsledky, využívať logické myslenie, používať rôzne nástroje zberu dát a ich spracovania (National Reasearch Council, 2000).

Aj napriek rozdielnym prístupom v definovaní objavovania a objavného vyučovania je možné identifikovať niekoľko zásadných čŕt, ktoré zdôrazňujú takmer všetci autori. Medzi tie najdôležitejšie patrí aktivita žiakov. Objavné vyučovanie je spôsob vyučovania orientovaný na žiaka, a teda práve žiaci by mali zohrávať aktívnejšiu rolu, v porovnaní s tým, ako to je v tradičnom, transmisívnom, spôsobe vyučovania. V objavnom vyučovaní je od žiakov vyžadovaný aktívny prístup k učeniu a objavovaniu. Žiaci musia zapájať svoje predošlé poznatky a skúsenosti a tvorivo pristupovať k riešeniu úloh. Pri popisovaní predmetov, objektov a procesov, kladení otázok, tvorbe a hodnotení vysvetlení, porovnaní výsledkov s aktuálnymi vedeckými poznatkami a s tým spojenej diskusii, si žiaci rozvíjajú schopnosti: pozorovanie, zbieranie a analýza informácií so zámerom predpovedania a formulácie záverov (Doorman, et al. 2016; Janečková & Čeretková, 2015; Lednický, 2015; PRIMAS 2013).

Implementácia objavného vyučovania do výchovno-vzdelávacieho procesu pre prírodovedné predmety, ako aj do vyučovania matematiky, bolo cieľom medzinárodného projektu PRIMAS (*Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education across Europe*) v rámci 7. rámcového programu Európskej únie. Vzájomná spolupráca dvanástich krajín priniesla navrhnuté postupy a učebné materiály s využitím princípov objavného vyučovania pre zefektívnenie výchovno-vzdelávacieho procesu, (Janečková & Čeretková, 2015; PRIMAS, 2013; www.primas.ukf.sk). Práve zaradením objavovania do vyučovania matematiky získavajú žiaci príležitosť učiť sa na základe svojich vlastných schopností a rozvíjať svoje matematické myslenie (Nohda, 2000).

V užšom zmysle slova je „objavné vyučovanie matematiky (IBME) ... paradigma vyučovania matematiky a prírodovedných predmetov zameraná na žiakov, v rámci ktorej sú žiaci vyzývaní, aby pracovali podobným spôsobom ako matematici a vedci. To znamená, že musia pozorovať javy, klásť otázky, hľadať matematické a vedecké spôsoby, ako odpovedať na tieto otázky (napríklad vykonávať experimenty, systematicky kontrolovať premenné, kresliť diagramy, počítať, hľadať vzory a vzťahy a robiť dohady a zovšeobecnenia), interpretovať a hodnotiť svoje riešenia a efektívne komunikovať a diskutovať o svojich riešeniach“.[1] (Dorier & Maass, 2014).

Vymenované princípy spolu s charakteristikou objavného vyučovania ukazujú na skutočnosť, že matematické problémy zamerané na objavovanie majú ponúkať voľbu z rôznych stratégií riešenia, vytvárať u žiakov nové skúsenosti, spájať ich s reálnym, realistickým, kontextom, naviesť žiakov k vlastnému skúmaniu v matematike a zaznamenať všetky zistenia do komplexného a súvislého riešenia, do písomnej správy o riešení a zistených, vypočítaných, výsledkoch. Jaworski (2006) spája pojem objavovania s perspektívou vo vzdelávaní v matematike, ktorá sa zaoberá poznávaním z hľadiska aktívneho budovania poznatkov z matematiky. Objavné vyučovanie v sebe zahŕňa rôzne prostriedky pre aktivizáciu žiaka na vyučovaní matematiky, napríklad používanie neštruktúrovaných úloh, skupinové vyučovanie, kladenie otázok, výber rôznych stratégií riešenia a pod. (Janečková & Čeretková, 2015).

1 *Inquiry-based mathematics education* (IBME) refers to a student-centered paradigm of teaching mathematics and science, in which students are invited to work in ways similar to how mathematicians and scientists work. This means they have to observe phenomena, ask questions, look for mathematical and scientific ways of how to answer these questions (like carrying out experiments, systematically controlling variables, drawing diagrams, calculating, looking for patterns and relationships, and making conjectures and generalizations), interpret and evaluate their solutions, and communicate and discuss their solutions effectively.

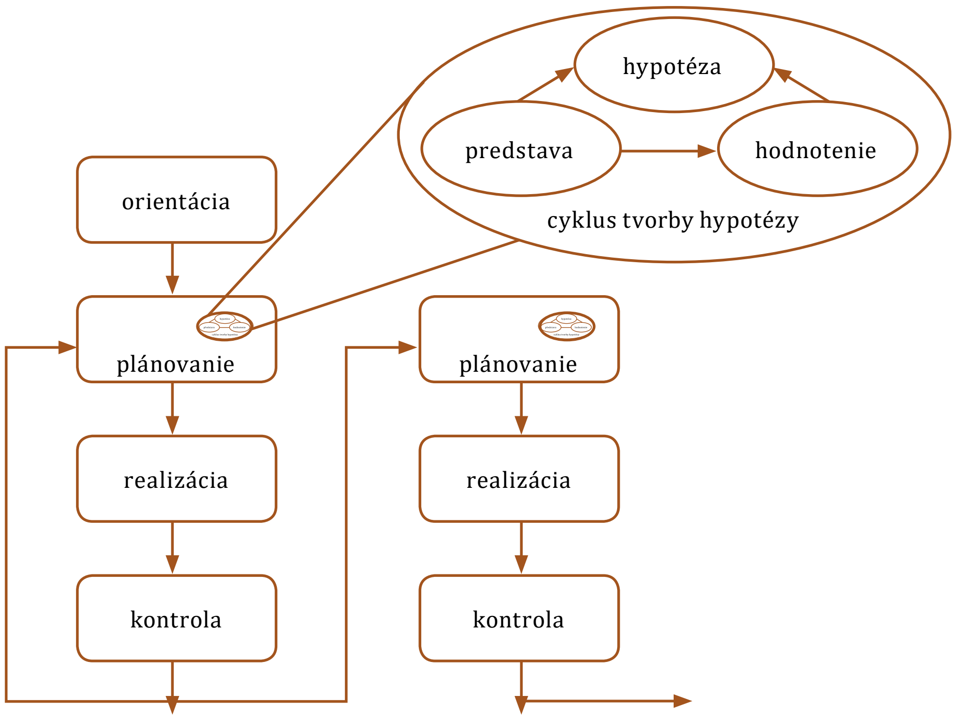
Okrem výberu stratégií riešenia problémov ponúka objavné vyučovanie možnosť rozvíjať napríklad aj matematické skúmanie. Matematické skúmanie, ako proces, môže byť chápaný ako forma vybranej heuristickej metódy, ako stratégia riešenia alebo ako súčasť matematického skúmania ako aktivity (Yeo & Yeap, 2010). Matematické skúmanie predstavuje proces štruktúrovania aktivít v konkrétnych kontextoch: prehlbovanie vedomosti matematiky, samostatnosť v matematickom myslení, analýza informácií pre výber vhodných dát a údajov, používanie rôznych prístupov a zhodnotenie rozmanitosti a počtu riešení zadaného problému (Frobisher & Frobisher, 2015b). Podobne možno charakterizovať procesy počas vzájomnej spolupráce, pri výmene názorov a počas riešenia konfliktov, ktoré, prirodzene, vyplývajú počas proces riešenia problému s otvoreným koncom. Žiaci potrebujú plánovať, pozorovať a zhodnocovať vlastné napredovanie, nielen v samostatnej práci, ale aj prostredníctvom tímovej spolupráce (Häkkinen, 2017). Princípy metodológie tvorivého prístupu pri riešení problémov popisujú heuristické princípy. Vo vyučovaní matematiky sa považuje za zakladateľa tzv. vedeckej heuristiky už predtým spomínaný G. Pólya (Šedivý et al., 2013).

Z uvedených charakteristík objavného vyučovania sa ukazuje, že práve problémy s otvoreným charakterom predstavujú prostriedok pre implementáciu objavného vyučovania do hodín matematiky. Samotný proces riešenia otvoreného matematického problému pozostáva zo štyroch fáz, podľa Pólya & Conway (1957). V prvej fáze musí žiak problému porozumieť. Následne môže prejsť do fázy druhej, kde musí navrhnúť a formulovať vhodný postup a stratégie pre riešenie. Nasleduje aplikácia zvolených stratégií a nakoniec zhodnotenie, teda v rámci spätnej reflexie sa žiak, riešiteľ, musí uistiť, že nájdený výsledok je vyhovujúci (Blaško, 2013; Pólya & Conway, 1957; Powel et al., 2009). Samotný proces riešenia otvoreného matematického problému pritom začína v druhej uvedenej fáze, totiž pri navrhovaní vhodných stratégií a pokračuje ešte v tretej fáze, pri aplikácii vybraných stratégií (Yeo & Yeap, 2010). Dôležité je podotknúť, že úlohou učiteľa nie je tento proces riešenia riadiť a smerovať žiakov k výsledkom, ktoré by mali dosiahnuť, vypočítať. Naopak, učiteľ sa by mal snažiť, aby dokázal rozumieť myšlienkam žiakov (Nohda, 2000).

Na model podnetného a tvorivého vyučovania matematiky, ktorý Pólya & Conway (1957) vo svojej publikácii zostavil, následne nadviazali ďalšie štúdie v súvislosti s plnením cieľov vyučovania matematiky na rôznych stupňoch vzdelávania. Každý zo štyroch vymenovaných krokov riešenia problému bol hlbšie analyzovaný, počnúc porozumením problému (Chiu, 2001; Stylianou, 2001; Moseley, 2005), pokračujúc návrhom plánu riešenia a jeho realizáciou (Lesh & Harel, 2003) a pohľadom späť končiac (Eizenberg & Zaslavsky, 2004; Pugalee, 2004). Proces riešenia matematického problému bol analyzovaný aj ako celok (Nesher, et al., 2003;

Mamona-Downs & Downs, 2004, 2005; Swafford & Langrall, 2000; Thom & Pirie, 2002). Pólyov štvorkrokový model sa nevyhol kritike a prepracovaniu. Na Slovensku je známy model DITOR manželov Zelinovcov (1990). Modely zachytávajúce cyklickú podstatu procesu riešenia problému môžeme nájsť v práci Borgersena (1994) alebo Carlsonovej a Bloomovej (2005) (obrázok 1.3).

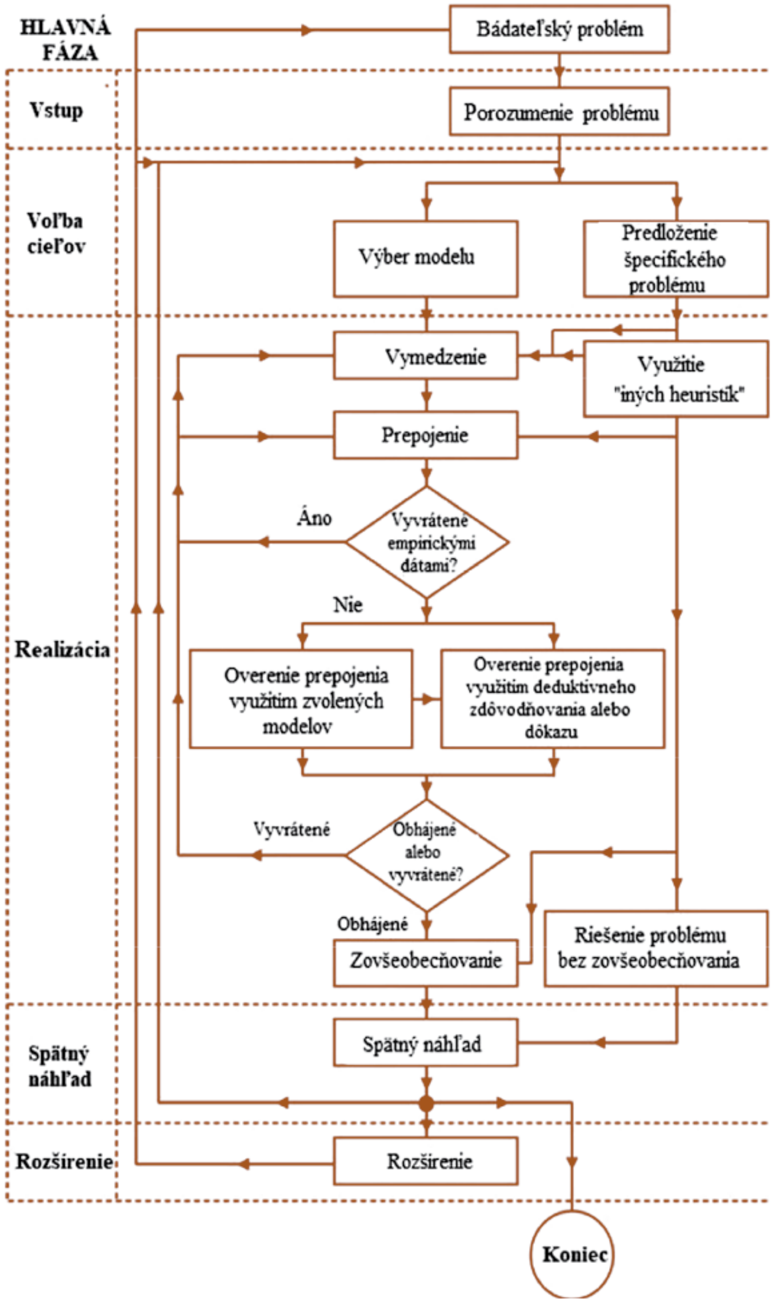
Obrázok 1.3: Znázornenie cyklickej podstaty procesu riešenia problému



Medová (2020a) podľa Carlson a Bloom (2005, s. 54)

Zo základnej štvorkrokovej schémy riešenia problému vychádzajú aj Yeo a Yeap (2010), ktorí vo svojej štúdií vytvorili model pre interakciu kognitívnych procesov počas realizácie aktivity zameranej na matematické skúmanie (obrázok 1.4).

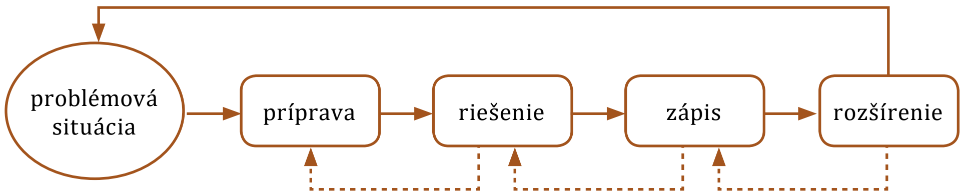
Obrázok 1.4: Model pre aktivitu zameranú na matematické skúmanie: Interakcia kognitívnych procesov



(Yeo & Yeap, 2010, s. 5)

Frobisherovci (2015a) taktiež rozpracovali model skúmania problémových situácií (obrázok 1.5) vychádzajúci z vyššie uvedených štyroch štádií riešiteľského procesu podľa Pólya & Conway (1957).

Obrázok 1.5: Model skúmania problémových situácií



(Frobisher & Frobisher, 2015a)

Daný model vychádza zo základnej charakteristiky objavného vyučovania, ako priblíženie činnosti žiakov k práci matematikov, vedcov a výskumníkov. Fázy riešenia problémovej situácie sú analogické k fázam riešenia otvorených problémov: príprava, riešenie, zápis a rozšírenie, pričom ich lineárnosť riešenia nevylučuje návrat k predchádzajúcim štádiám.

Matematické problémy, zamerané na objavovanie v matematike, môžu byť predkladané žiakom aj prostredníctvom mimoškolských aktivít, napríklad, vo forme súťaží. Situácie, ktoré sú pre žiakov nové, predstavujú pre nich novú výzvu, prirodzene podnecujú žiakov k istému riadeniu, regulácii a deleniu strategických aktivít napríklad v tímovej spolupráci (Häkkinen, 2017). Medzi takéto situácie možno zaradiť aj matematické súťaže s netradičným kontextom. Tradične koncipované súťaže pozostávajú zo zatvorených problémov so zatvorenou cestou. Nevyžadujú hlbšie schopnosti riešiteľa, ku ktorým patrí, napríklad, formulovanie otázok, preformulovanie problémov, vytváranie, hodnotenie a odmietanie dohadov, práca s novými a neštandardnými nápadmi, To všetko sú činnosti, ktoré si vyžadujú dostatok času na hlbšie premýšľanie a vedomé spracovanie záverov. Už len samotná príprava žiakov pre budúcu účasť v takejto matematickej súťaži vyžaduje iný prístup k žiakom ako účastníkom, a môže byť podporovaná priamo v priebehu vyučovania matematiky (Kenderov, 2006).

Ďalším prístupom je možnosť riešenia komplexných matematických problémov v skupinách alebo tímoch. Takýto prístup sa môže odzrkadliť v lepších výsledkoch v štandardizovaných testoch jednotlivcov, dokonca, môžu byť identifikované lepšie výsledky ako pri tradičnom transmisívnom vyučovaní (Boaler, 1998, 2002, 2015; Bottge, 1999). Pozitívny efekt riešenia otvorených problémov je možné pozorovať, aj potom, ako žiaci z tried využívajúcich vzájomnú skupinovú spoluprácu pri riešení komplexných otvorených problémov, dosiahnu produktívny vek. Žiaci, ktorí majú skúsenosť s otvorenejším prístupom k vyučovaniu matematiky, viac oceňujú jej užitočnosť a majú k vedomostiam z matematiky lepší vzťah, čo pozitívne ovplyvňuje ich akademickú úspešnosť i voľbu povolania (Boaler & Selling, 2017).

2/
MATEMATICKÉ KOMPETENCIE ŽIAKOV, PÍSOMNÝ PREJAV A KREATIVITA

Štúdia OECD PISA (The Programme for International Student Assessment), medzinárodné meranie výsledkov vzdelávania, patrí medzi najkomplexnejšie medzinárodné štúdie. V rámci hodnotenia študijných výsledkov skúma úroveň čitateľskej, matematickej a finančnej gramotnosti. Meranie schopností žiakov je uskutočňovaný na základe spoločenskej objednávky orientovanej na schopnosti jednotlivca z pohľadu požiadaviek trhu práce (PISA 2015, 2017). Do pozornosti sa preto dostávajú kľúčové kompetencie, ktoré boli definované ako kompetencie 21. storočia: sociálne kompetencie, kompetencie pre prácu s IKT, kreatívne myslenie a tímová spolupráca pri riešení problémov (National Research Council, 2011).

Rozvoj kompetencií žiakov je jedným z kľúčových cieľov pôsobenia výchovno-vzdelávacieho procesu. Vo všeobecnosti, kompetencie môžeme definovať ako súbor vzájomne prepojených vedomostí, zručností, schopností a postojov, ktoré žiakom umožňujú úspešne zvládnuť rôzne životné, osobné, pracovné alebo sociálne situácie. Kompetencie teda nepredstavujú niečo, čo sa vedome učí. Kompetencie sa formujú na základe osobnej praktickej skúsenosti, sú nositeľom vedomosti, ale aj zručnosti, postojov a iných zložiek ako celku a majú tendenciu sa neustále rozvíjať (Suchožová, 2014). Frobisherovci (2015a) uvádzajú päť všeobecných kognitívnych kompetencií, ktorými nezávisle mysliaci žiak disponuje: zručnosti v spracovávaní informácií, argumentačné zručnosti, poznávacie zručnosti, zručnosti tvorivého myslenia a vyhodnocovanie zručností. Rovnako Boesen et al. (2018) považujú za základ pre rámcové vymedzenie kompetencií v riešení matematických problémov nasledovné kompetencie: výber stratégie riešenia, zdôvodňovanie, proces riešenia, spracovanie a prepájanie reprezentácii matematických objektov a komunikácia.

Niss & Højgaard (2019) popisujú vo všeobecnosti kľúčovú charakteristiku kompetencií slovným spojením „pripravenosť konať“, ktorá vyplýva z kognitívnych predpokladov jednotlivca pre vykonávanie určitých činností. V rámci svojej štúdie špecifikujú matematickú kompetenciu ako pohotovú pripravenosť správne konať a reagovať na ľubovoľný druh matematickej výzvy v danej situácií. Situácia pritom nemusí byť nutne matematická, ale dajú sa na nej vytvárať zadania pre matematické úlohy alebo matematické problémy. Matematické myslenie zahŕňa „procesy, stratégie a zručnosti, ktoré sa snažia nájsť zmysel skutočného a matematického sveta s využitím myšlienok a jazyka matematiky." (Frobisher & Frobisher, 2015a, s. 12). Matematická kompetencia pozostáva zo schopností a ochoty používať matematické spôsoby myslenia, ktoré sa prejavujú v uplatňovaní logického a priestorového myslenia a prezentácie matematických vedomostí v nich, zviditeľňujú sa prostredníctvom vzorcov, modelov, diagramov, grafov a tabuliek (Blaško, 2010). Na matematické kompetencie možno nazerať v dvoch rovinách podľa Niss & Højgaard (2019). Schopnosť porozumieť, posúdiť, vytvárať a používať matematiku aj v nematematických situáciách (mathematical competence). Tú rovinu následne dopĺňajú faktické vedomosti a istá slovná zásoba, teda rozpoznateľné a zreteľné položky (mathematical competency), ktoré sú nevyhnutnými predpokladmi prvej roviny.

Košč (1972) rozlišuje štyri úrovne matematických schopností. Na prvej úrovni sú žiaci schopní vidieť a následne odhaľovať vzťahy a hľadať spôsoby ako ich navzájom spájať a vyvodzovať závery. Na ďalšej úrovni matematických schopností žiaci vedia z vyvodených vzťahov vyčleniť podstatné a nové skutočnosti. Na tretej úrovni je definovaná schopnosť manipulovať s matematickými symbolmi a narábať s abstraktnými prvkami. Štvrtá úroveň obsahuje analýzu zadania problému, triedenie dát podľa relevantnosti a voľbu stratégie pre riešenie problému.

Prejav matematických kompetencií možno pozorovať prostredníctvom komunikáce ako „schopnosť vyjadriť rôznymi spôsobmi matematický obsah a to slovne aj písomnou formou, pochopenie iných písomných výstupov a slovných výrokov, ktoré majú matematický obsah" (Šedivý et al., 2013, s. 10). Danými charakteristikami disponuje v istej miere každý jednotlivec a ich rozvíjanie silno súvisí s rozvíjaním matematickej gramotnosti. Lukáč & Sekerák (2001) v rámci matematických kompetencií vymedzili dvanásť kategórií, ktoré by mal žiak nadobudnúť a rozvíjať:

- matematické myslenie a usudzovanie,
- pojmy, fakty, tvrdenia a postupy v matematike,
- využitie symbolických, formálnych a technických vyjadrení a operácií,
- znázornenie a popísanie matematických objektov a situácií,
- položenie otázky, na základe ktorej nasleduje vymedzenie problému a jeho riešenie,
- matematické modelovanie,
- matematická argumentácia a dokazovanie,
- používanie pomôcok,

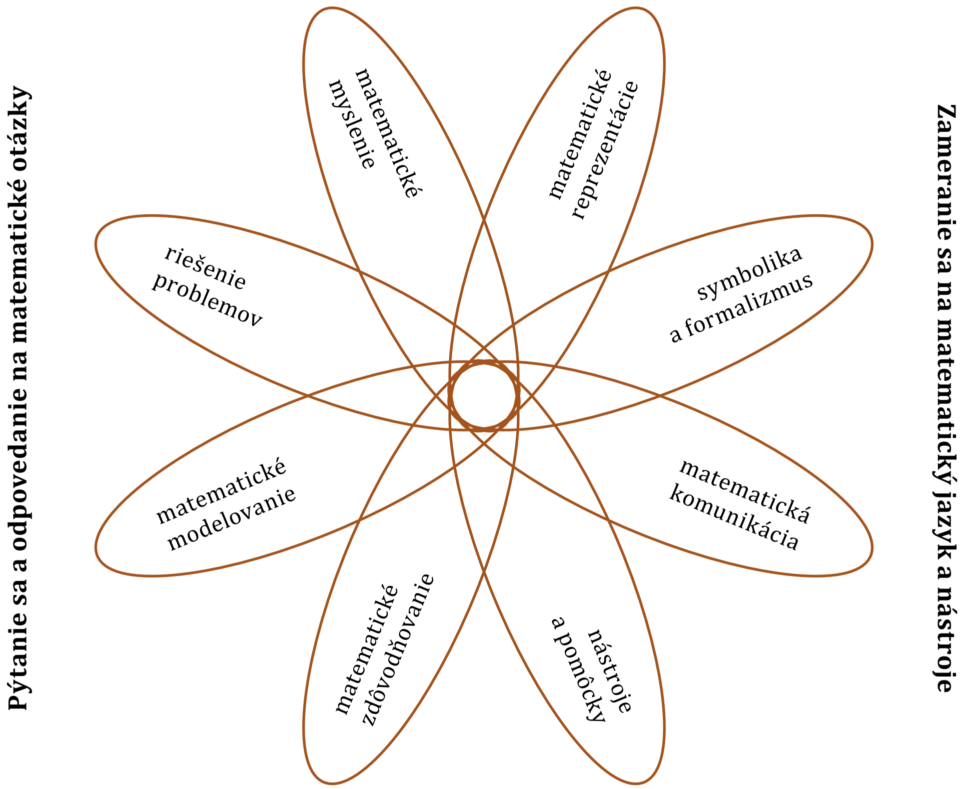
- komunikácia,
- práca s informáciami,
- kompetencie týkajúce sa postojov a hodnotového systému,
- personálne a interpersonálne kompetencie.

Daný kompetenčný model vznikol na základe štúdia viacerých výskumov a neskoršej aplikácie výsledkov do výchovno-vzdelávacieho procesu, do vyučovacíh hodín matematiky. Existuje viacero náhľadov pre definovanie a rozdelenie matematických kompetencií (Niss, 2003; Šedivý et al., 2013; Turner, 2010). Napríklad Turner (2010) ponúka rozdelenie matematických kompetencií, na základe definovania súboru individuálnych charakteristík nasledovne:

- komunikácia (čítanie, dešifrovanie, interpretácia tvrdení, ako aj schopnosť vysvetliť, prezentovať a argumentovať),
- matematizácia (pretvorenie reálneho problému do problému matematického, čo znamená interpretáciu matematických objektov a vedomostí),
- reprezentácia (vypracovanie alebo využívanie opisov matematických objektov alebo vzťahov, rovníc, vzorcov, grafov, tabuliek, diagramov),
- zdôvodňovanie a argumentácia (logicky zakorenené myšlienkové procesy, ktoré skúmajú a spájajú jednotlivé prvky problému, aby bolo možné vyvodiť z nich závery),
- strategické myslenie (výber a následná implementácia matematických stratégii vhodných pre vyriešenie problému),
- využívanie symboliky, formálneho a technického jazyka a operácií (porozumenie a využívanie symbolických vyjadrení, použitie konštruktov založených na definíciách, a pravidlách formálnych štruktúr).

Niss & Højdaard (2019) zostavili model matematických kompetencií, ktorý má pokrývať celú matematickú činnosť v dvoch kategóriách: schopnosť efektívne sa zapájať do kladenia otázok a zodpovedanie týchto otázok a schopnosť osvojenia si matematického jazyka, konštruktov a nástrojov. V oboch týchto rovinách sa stretávajú navzájom nedisjunktné zložky matematických kompetencií (obrázok 2.1). V prvej kategórii sa jedná o kompetenciu matematického myslenia (zapájanie sa do objavovania v matematike), kompetencia riešenia matematických problémov (predkladanie a riešenie matematických problémov), kompetencia vytvárať matematický model (analyzovanie a konštruovanie modelov mimo matematických kontextov a situácií) a kompetencia matematického zdôvodňovania (posudzovanie a zdôvodnenie matematických tvrdení). V druhej kategórii sú tiež štyri zložky matematických kompetencií a to: kompetencia matematických reprezentácií (interpretácia reprezentácií rôznych matematických objektov), kompetencia matematickej symboliky a formalizmu (a narábanie s nimi), kompetencia matematickej komunikácie (komunikácia v matematike a o matematike s inými ľuďmi) a kompetencia práce s nástrojmi a pomôckami zaoberať sa matematickým jazykom a nástrojmi.

Obrázok 2.1: Diagram matematických kompetencií pokrývajúci matematickú činnosť v riešení problémov



(Niss & Højdaard, 2019)

Všetky spomínané kategorizácie majú snahu stále zrozumiteľnejšie a presnejšie zadefinovať, popísať alebo vyjadriť, čo matematická kompetencia znamená v zmysle matematicky premýšľať a pracovať. To, čo majú spoločné je, že sa odvíjajú od základných pojmov teórie vyučovania matematiky (Boesen, et al., 2018). Matematické kompetencie, ako všeobecné matematické vedomosti, schopnosti a zručnosti, predstavujú teda hlavné aspekty, ktoré budujú matematickú gramotnosť (Šedivý et al., 2013).

Prejavené matematické kompetencie sa odrážajú od vývoja a spôsobu matematického myslenia. Charakter otvorených matematických problémov poskytuje príležitosť aj pre ich pozorovanie a odhaľovanie analýzou formulácie písomného riešenia problému. Tým sa otvára otázka rozvíjania písomného prejavu žiakov v matematike. Na hodinách matematiky by mal učiteľ podporovať u žiakov analýzu a spracovanie informácii, sústredenie sa na zodpovedanie na zadané otázky, na hľadanie súvislostí a objavovanie vlastností objektov, o ktorých problém hovorí a podobne. Samozrejme, to, k akým riešeniam sa žiaci dopracujú, závisí od invencie žiakov, od ich okamžitého vedomostného a intelektuálneho nastavenia a samozrejme i od motivácie. Pugalee (2005) uvádza, že písanie matematických postupov a riešení podporuje matematické uvažovanie, ozrejmuje riešenie problémov a pomáha žiakom osvojiť si aj zručnosti efektívnej komunikácie a argumentácie v matematike.

Podľa Russeka (1998) je riešenie otvoreného problému vo forme písomnej správy, práve pri matematickom skúmaní, nevyhnutná. Pri hlbšom uvažovaní o probléme môže viesť aj k lepšiemu porozumeniu problémovej situácie (Fisher & Malle, 1985). Z pohľadu žiakov predstavuje proces riešenia niekoľko krokov, napríklad: analyzovanie zadania matematického problému, návrh a odôvodnenie výberu stratégií riešenia, popis myšlienkového procesu a opis vlastných záverov. Interpretácia výsledkov vyžaduje originálne prepojenie viacerých matematických vedomostí a myšlienkových postupov do súvislého textu. Hovoríme o vytváraní písomnej správy, respektíve písomného reportu, ako písomného žiackeho riešenia otvorených matematických problémov. Písomnú správu možno definovať ako komplexný a detailný sumár výsledku, ku ktorému sa žiaci vo svojom riešiteľskom procese dopracovali. Jednotlivý popis krokov riešenia je doplnený o originálne tabuľky, grafy, údaje, a najmä o ich analýzu a správnu interpretáciu (Russek, 1998).

Písomný prejav žiaka je dôležitým výstupom v mnohých vyučovacích predmetoch. Písanie, ako také, je schopnosť efektívne vytvárať súvislý text pre rôzne účely a cieľové skupiny. V rámci vyučovania matematiky predstavuje písomný prejav viac ako možnosť zaznamenávania informácií. Písomný prejav môže byť využitý, napríklad, ako spôsob alebo nástroj pre podporu učenia sa žiakov (Urquhart, 2009). Písomný prejav v matematike má na rozdiel od všeobecného ponímania písania jeden výnimočný prvok: vzorce a rovnice. Svojím spôsobom sa však aj vzorce a rovnice riadia štandardnými gramatickými pravidlami, napríklad operácie plnia funkciu slovies (Lee, 2010). Z vymedzenia písomného prejavu u rôznych autorov vyplýva potreba definovania základných zložiek písomného prejavu. Jednotlivé zložky sú objektom hodnotenia písomného prejavu, respektíve, je možné definovať zložky, na základe ktorých možno rôzne písomné výstupy porovnávať.

Howison (n.d.) vymedzuje päť kvalít písomného prejavu v matematike: matematický obsah, názorné dodatky, hĺbka skúmania, matematické myslenie a organizácia dát. Na základe nich možno identifikovať úroveň schopností žiakov, ale na druhej strane i nedostatkov. Matematický obsah, ako jedna zo zložiek kvality písomného prejavu, odzrkadľuje úroveň porozumenia pojmom a vlastnostiam týkajúcich sa riešeného matematického problému. Už vyššie spomínané využitie obrázkov, grafov, tabuliek a pod., poukazuje na úroveň využitých názorných dodatkov. Dôležitá je pritom miera ich názornosti, ale aj relevancia ich obsahu a použitia. Hĺbka skúmania ukazuje na úrovenielen ň konečných záverov, na ich vzájomne prepojenie, ale aj na prepojenie s matematickým kontextom. Veľmi dôležitou kvalitou pre pozorovanie úrovne písomného prejavu je matematické myslenie, v ktorom sa odráža výber riešiteľských stratégií. Organizácia dát predstavuje úroveň štýlu písania, formy celkového textu a súvislosti textu. Takto formulované zložky kvality popisujú pozorovateľné aspekty zručností, pre ktoré je možné hodnotiť výkon žiaka, alebo skupiny žiakov, v písomnom prejave riešenia matematického problému.

Iný pohľad hodnotenia písomného prejavu v riešení matematických problémov spočíva v členení štruktúry napísaného textu. Jodi a Antoniou (www.jodidurgin.com) vytvoril návrh popisu rôznych úrovní, ktoré sa odvíjajú od otázky vyjadrujúcej požadovaný výkon.

1. **Úvod: Aká je moja úloha? Aké výsledky a záver môžem očakávať?**
   Úrovne výkonu v úvodnej časti písomnej správy sú určené na základe predpokladov a informácií, ktoré sú pre vyriešenie problému použiteľné. Na najnižšej úrovni sa v úvode písomnej správy nenachádzajú použiteľné informácie, ktoré vedú k vyriešeniu problému. Na najvyššej úrovni riešitelia uvádzajú predpoklady, ktoré vedú k budúcemu výskumu.
2. **Postup riešenia: Aké kroky mám spraviť pre vyriešenie problému?**
   Písomná správa na najnižšej úrovni neobsahuje popis jednotlivých krokov a informácie sú rozhádzané. Naopak, na štvrtej úrovni písomná správa odráža podrobné a zrozumiteľné vysvetlenie postupu riešenia.
3. **Využitie matematického myslenia: Aké matematické stratégie mám využiť tak, aby som postupoval ako matematik?**
   Matematické myslenie je hodnotené na základe počtu využitých matematických stratégií. Využitím najviac dvoch matematických stratégií sa riešiteľ zaraďuje do prvej úrovne zvládnutia matematického myslenia v písomnom prejave. Na štvrtej úrovni je využitých päť a viac stratégií, aj s vysvetlením, prečo a ako boli tieto stratégie vybrané.
4. **Výsledky: Čo som zistil a ako to môžem spojiť s mojimi prvotnými predpokladmi?**
   Vyhodnotenie výsledkov nezahŕňa iba kontrolu správnosti nájdených záverov, ale aj ich porovnanie s úvodnými predpokladmi. Písomná správa, odpovedajúca prvej úrovni, nie je kompletná, prípadne obsahuje nesprávne závery. Najvyššia

štvrtá úroveň sa vyznačuje nielen správnosťou záverov, ale aj podrobnou interpretáciou vyvodených záverov. Navyše, závery sú doplnené tabuľkami alebo grafmi a odpovedajú úvodným predpokladom.

5. **Zhodnotenie: Ako je môj vlastný výskum spojený s matematikou? Aké ďalšie otázky to vo mne vyvoláva?**
   Spätný pohľad na riešenie je dôležitou súčasťou prejavenia vyšších schopností žiakov. Pokiaľ žiak nepreukáže žiadne dôležité spojenie s matematikou alebo neuvádza ďalšie možnosti skúmania, potom je jeho výkon zaradený na prvú úroveň matematického prejavu v písomnom riešení. Najvyššia úroveň sa, naopak, preukazuje úplným zhrnutím všetkých podstatných informácií a výsledkov prostredníctvom komentárov a diskusie o nových predpokladoch.

Urquhart (2009) uvádza prvky tzv. výučby písania, ktorými si žiaci nielen zdokonaľujú svoj písomný prejav, ale začínajú používať písanie ako nástroj na učenie sa. Samozrejme výstup písomného prejavu sa začína pri plánovaní stratégií. Pri komponovaní výsledného textu, ako riešenia, je potrebné vedieť správne formulovať aj zložitejšie vety, kombinovať ich a sumarizovať ich do jednotného celku. Celkový písomný výstup by sa nemal odkláňať od výučbového obsahu v rámci konkrétne položených dosiahnuteľných cieľov. Písanie je vhodným, prirodzeným, nástrojom pre výučbu obsahového materiálu, prostredníctvom ktorého môžu žiaci pri riešení matematických problémov navzájom spolupracovať.

Okrem písomného prejavu, písomná správa v sebe odzrkadľuje prejav kreatívneho myslenia v zmysle Leikin & Pitta Pantazi (2013). Vo všeobecnosti, kreativitu možno definovať ako schopnosť pre vyprodukovanie originálnej, primeranej a užitočnej práce (Weisberg, 1998). Matematická tvorivosť vo výchovno-vzdelávacom procese je zvyčajne spojená práve s riešením problému alebo s jeho formuláciou (Elgrably & Leikin, 2021).

V ostatných rokoch sa kreativite a kreatívnemu mysleniu v matematike venuje osobitá pozornosť, aj vzhľadom na stanovenie už spomínaných kompetencií definovaných pre potreby vzdelania pre 21. storočie. Mnohí autori (Mann, 2006;Weinhandl & Lavicza, 2021) vychádzajú z definície kreativity od Torranca (1965) ktorý kreativitu definuje ako proces, ktorý vychádza z osobitej citlivosti na problémy, nedostatky, medzery vo vedomostiach, chýbajúce vedomosti a podobne. Rovnako tak tento proces zahŕňa odhaľovanie ťažkostí, hľadanie riešení alebo formuláciu hypotéz a ich následné overenie a interpretáciu. Kreatívne myslenie ako schopnosť vytvárať niečo nové kombinovaním konceptov či analýz z rôznych vedných odborov, môže využívať vlastné skúsenosti, pozorované alebo získané prostredníctvom komunikácie (Sirajudin et al., 2021).

Kreatívne myslenie v matematike otvára žiakom alebo riešiteľom otvorených problémov veľa možností ponoriť sa hlbšie do matematiky, spoznávať a chápať zákonitosti a hľadať nové vlastnosti a súvislosti. Strouhal (2013) definuje kreatívne myslenie jediným slovom: problematizovanie. Vytvorenie nového postupu, ktorý je funkčný a použiteľný aj pre iné druhy problémov. Súčasťou kreatívneho postupu je aj vnímanie drobných detailov, ktorých výskyt potvrdzuje rozvoj a zdokonaľovanie premýšľania. Z tohto dôvodu je potrebné podporovať nápady a originalitu žiakov, ako aj posilňovať motiváciu k vlastnému objavovaniu prostredníctvom riešenia otvorených problémov.

Kreativita v matematike hrá rolu vo formulovaní matematických hypotéz, ktoré sa týkajú danej matematickej situácie. Úlohou riešiteľa je oslobodiť sa od štandardných myšlienkových postupov, zvážiť aj nezvyčajné nápady pri riešení, premýšľať nad prípadnými dôsledkami, zistiť, čo je možné doplniť pre vyriešenie problému a najmä klásť otázky (Balka, 1974). Mann (2006) uvádza roztriedenie charakteristík podľa Caltona (1959), ktorými disponuje kreatívne mysliaci riešiteľ matematického problému, v šiestich vlastnostiach:

1. Širšie uvažovanie o možných dôsledkoch pri zmene jednej alebo viacerých hypotéz, ktoré vyplývajú z problému.
2. Tendencia zovšeobecňovať konkrétne výsledky, prostredníctvom hľadania spoločných vlastností vo výsledku. Cieľom je, napríklad, vylepšiť dôkaz alebo celkovú štruktúru riešenia.
3. Hľadanie ďalších alebo nových riešení za účelom získania nových vedomostí.
4. Overovanie výsledného riešenia prostredníctvom hľadania súvislostí medzi samotným problémom a konceptom riešenia.
5. Intuitívne hľadanie vhodných zdrojov, ktorých doplnenie rozširuje a podporuje tvorbu výsledného riešenia.
6. Spracovanie takých informácií a údajov, ktoré vo fáze riešenia problémov nevyvolávajú špeciálnu zvedavosť u iných riešiteľov.

Bergqvist & Lithner (2005) zhrnuli kreatívne myslenie do nasledujúcich podmienok: inovácia v uvažovaní, flexibilita v prístupoch a v adaptácii na situáciu, vierohodnosť v argumentácii a najmä stabilný matematický základ. Vzhľadom na to, že kreativita môže byť definovaná ako aktívny proces, možno ju definovať aj prostredníctvom činností: venovať problému pozornosť, správať sa systematicky a otvorene, zaujímať stanovisko doplnené postačujúcimi dôkazmi, hľadať vyjadrenia, otázky a zdôvodnenia, rozumieť informáciám, vyberať spoľahlivé zdroje, zachovávať autenticitu, hľadať alternatívy (Sirajudin, et al., 2021). Weinhandla & Lavicza (2021) popisujú kreatívny proces ako uplatňovanie matematických kompetencií, technologických kompetencií a kompetencií získavania informácií pri riešení problémov s reálnym kontextom. Kreativitu v matematike môžeme pozorovať pri rôznych matematických aktivitách, ktoré možno prirovnať k práci vedcov, matematikov (Maj, 2010; podľa Klakla 2002):

1. formulácia a overenie hypotéz,
2. prenos metód, teda zdôvodnenie alebo spôsob riešenia je prenesený na analogický alebo zovšeobecnený prípad,
3. kreatívne prijatie, spracovanie alebo využitie matematických informácií,
4. využitie kritického myslenia,
5. tvorba problémov pri prenose metód riešenia,
6. predĺženie problému, respektíve tvorba ďalších problémov[2],
7. ukotvenie problému v otvorenej situácii.

Z uvedených skutočností vyplýva, že kreativita hrá významnú úlohu pri tvorbe písomného riešenia. Navyše, kreativita v matematike nepredstavuje len nástroj pre hľadanie viacerých riešení problému, ale kreatívnym myslením nadobúda riešiteľ nové postoje a náhľad na svet z viacerých stránok (Kamp, 2016). Podľa Žáka (2004) tvoria kreativitu tri zložky: originalita v spojení vstupných údajov, správnosť a relevantnosť využitia údajov ako aj, a najmä, aplikovateľnosť výsledkov a hodnota výsledkov pre ďalšie potencionálne skúmanie.

Brookhart (2013) sa vo svojej práci tiež zameriava na možnosti identifikovania pozorovateľných aspektov kreativity v matematike, konkrétne pri riešení otvorených matematických úloh a matematických problémov zo širšieho hľadiska. Definuje charakteristiky kreativity nasledovne: uvedomovanie si dôležitosti hlbokých základných vedomostí z matematiky a neustály záujem o nové poznatky, otvorenosť novým myšlienkam a ich aktívne vyhľadávanie, hľadanie zdrojových údajov a materiálov v širokej ponuke publikácií, médií, u iných osôb, napríklad odborníkov, ale tiež pri akejkoľvek činnosti; organizovanie a reorganizovanie myšlienok do rôznych kategórií alebo kombinácií a následné zhodnotenie, či sú výsledky myšlienkového procesu nové, zaujímavé alebo nápomocné pri riešení úloh a problémov a v prípade neznámeho postupu schopnosť využívať metódu „pokus–omyl" a schopnosť vidieť nepriaznivé výsledky ako možnosť ďalšieho posunu k správnemu riešeniu.

2 podobne ako cyklická povaha riešenia problémov podľa Carlson a Bloom, 2005 v predchádzajúcej podkapitole, viď obrázok 1.6

3/ RUBRIKY AKO HODNOTIACI NÁSTROJ VO VYUČOVANÍ

So zavedením otvorených matematických problémov pre riešenie realistických situácií na vyučovaní matematiky sa tiež otvára otázka o forme hodnotenia žiackych výkonov. Profesorka Jo Boaler na Univerzite v Stanforde je výrazným zástancom reformy vo vyučovaní matematiky. Reforma je zameraná na podporu motivácie žiakov k štúdiu matematiky. Prostredníctvom vlastnej skúsenosti má ambíciu pomôcť nielen učiteľom, ale aj rodičom zvládnuť podporu záujmu o matematiku u detí. Ako spoluzakladateľka webovej stránky Youcubed (www.youcubed.org) ponúka rady na plánovanie správnych krokov vedúcich k scenáru aktivizačnej vyučovacej hodiny matematiky. Boaler (2015) zdôrazňuje potrebu využívania otvorených problémov a ich riešenia na hodinách matematiky ako aj prechod od známkovania k hodnotiacim komentárom. Hodnotiace komentáre slúžia ako motivácia žiakov k osvojovaniu si matematických vedomostí a teda aj k snahe zlepšovať celkové výsledky v matematike. Hodnotiace komentáre označuje ako tzv. konštruktívne komentáre k žiackym riešeniam otvorených matematických úloh a problémov. Vo svojej publikácii uvádza niekoľko stratégií a metód k tvorbe podobných slovných hodnotení, ktoré slúžia aj pre sebahodnotenie žiakov.

Vzhľadom na uvedené aspekty otvorených problémov v matematike, ako nástroja pre implementáciu objavného vyučovania, sa od žiakov, ako riešiteľov, požaduje aj neštandardný prístup. Je potrebné, aby žiak, povedzme, prekročil hranicu zaužívaných postupov a známych algoritmov a pri riešení problému otvoril prechod inovatívnym a originálnym myšlienkam. Je zrejmé, že nie je možné dopredu predpokladať postup, ktorý si žiaci pri riešení zvolia (Boaler, 1998). S implementáciou objavného vyučovania do hodín matematiky na školách súvisí aj otázka hodnotenia práce žiakov, ale na druhej strane možnosť hlbšej analýzy úrovne vedomostí, schopností, kompetencií i matematickej gramotnosti u žiakov.

V snahe lepšie porozumieť myšlienkovému postupu žiakov sa najčastejšie stretávame s tým, že žiak je učiteľom vyzvaný pri riešení opisovať jednotlivé kroky postupu riešenia svojimi slovami, a to aj pri riešení rutinného, štandardného problému. Učiteľ totiž potrebuje mať prehľad nielen o tom, či žiak vie úlohu vypočítať, ale aj či postupu riešenia rozumie. Uvedená forma verbálneho opisu postupu je však z hľadiska dlhodobého pozorovania úrovne kompetencií žiakov neefektívna a v praxi väčšinou slúži najmä na overenie ovládania konkrétneho algoritmu. Rovnako tak spätná väzba, formulovaná učiteľom, v tomto prípade, je namierená na usmerňovanie žiackych krokov pri riešení alebo je zameraná na potvrdenie správnosti riešenia.

Pri otvorených matematických problémoch je to inak. Neočakáva sa využitie konkrétnych algoritmov v riešení. Ako už bolo predtým povedané, od žiakov sa vyžaduje otvorenosť a tvorivý prístup. Teda výstupom žiackeho riešenia nemá byť len fakt, že žiaci predložia riešenie problému, kde očakávajú spätnú väzbu o správnosti ich riešenia. Samozrejme nevyplýva z toho, že správnosť riešenia nie je dôležitá. Rovnako dôležité je tiež pozerať sa na cestu, ktorú si žiaci pri riešení zvolili, teda na stratégie a prostriedky ako aj na formuláciu riešenia. Navyše, otvorené problémy otvárajú priestor pre viacero správnych riešení. Práve z tohto dôvodu vyplýva otázka, akým spôsobom, respektíve akým nástrojom, môže učiteľ hodnotiť písomné žiacke riešenia otvorených matematických problémov vo forme vyššie spomínanej písomnej správy. Na systematický spôsob hodnotenia, prostredníctvom rubrík pre slovné hodnotenie, z hľadiska motivácie žiakov pre dosiahnutie vyšších výkonov, sa v súčasnosti zameriava niekoľko autorov.

Ako adekvátny nástroj sa pre tento účel ukazuje forma hodnotiacej tabuľky, ktorá popisuje výkon žiakov pre viacero úrovní. Jedná sa o spôsob formatívneho hodnotenia, kedy výkon žiakov nie je ohodnotený prostredníctvom kvantitatívneho prvku (známka na stupnici alebo percentuálne ohodnotenie), ale slovným popisom očakávaných kompetencií žiakov. Tieto druhy hodnotiacich tabuliek môžu byť spoločne označené pod názvom rubrika (tabuľka 3.1).

Tabuľka 3.1: Všeobecná ukážka rubrík pre hodnotenie

	Názov určujúci predmet hodnotenia – atribút hodnotenia	
ÚROVEŇ	Kritérium 1	Kritérium 2
Úroveň 1	Popis prvej úrovne pre prvé kritérium.	Popis prvej úrovne pre druhé kritérium.
Úroveň 2	Popis druhej úrovne pre prvé kritérium.	Popis druhej úrovne pre druhé kritérium.
Úroveň 3	Popis tretej úrovne pre prvé kritérium.	Popis tretej úrovne pre druhé kritérium.

Rubriku možno definovať ako ucelený súbor kritérií, ktorý popisuje požadovaný výkon žiakov na vopred zvolených a pozorovateľných úrovniach (Brookhart, 2013). Svojou podstatou napĺňa tri hlavné funkcie v hodnotení: zistiť, na akej úrovni sa žiaci nachádzajú, kam sa potrebujú dostať a akým spôsobom dokážu prekonať „túto vzdialenosť" (Boaler, 2015). Slovné hodnotenie teda spĺňa funkciu spätnej väzby, ako informácie, ktorá je nevyhnutná k vyvolaniu inšpirácie a istého pokroku vpred (Reitmayerová & Broumová, 2007).

Brookhart (2013) zdôrazňuje význam rubrík, na jednej strane, ako dôležitého prostriedku pre hodnotenie výkonu žiakov, ale význam rubriky vidí aj v jej funkcií ako učebnej pomôcky. Vo svojej publikácií popisuje podrobný postup, ako správne zostaviť rubriky s vhodne zvolenými hodnotiacimi kritériami a pre vytvorenie relevantných popisov výkonu žiakov posudzovaných na rôznych úrovniach. V jednotlivých kapitolách uvádza názorné ukážky rubrík pre hodnotenie univerzálnych atribútov pre rôzne stratégie riešenia v rôznych zameraniach, teda pre využitie v rôznych vyučovacích predmetoch. Pre porovnanie, publikácia autorov Košťálová et al. (2008) tiež popisuje formu hodnotenia, ktorej hlavným účelom má byť pomôcka pre žiakov k sebazdokonaľovaniu sa. Zavedený pojem „kriteriálne hodnotenie" vychádza z presne definovaných kritérií, ktoré možno pozorovať u žiakov s tým, že môžu nadobúdať rôzne úrovne kvality. Jednotlivé kritériá hodnotenia majú podstatu indikátorov, ktoré žiakom ukazujú, do akej miery žiak problém splnil alebo vyriešil Rovnako tak poskytujú učiteľom informácie o aktuálnom pokroku žiakov v kľúčových kompetenciách a zručnostiach, ktoré môže pozorovať a hodnotiť.

Postupnou analýzou uvedenej definície môžeme dostať postup, akým spôsobom je možné si takýto hodnotiaci nástroj vytvoriť (Koštálová et al., 2008). V prvom rade je potrebné presne a jednoznačne určiť, aký atribút hodnotenia chceme v žiackych výkonoch pozorovať. Podľa povahy vybraného atribútu možno rozlišovať aj niekoľko čiastkových kritérií pre utvorenie uceleného náhľadu pre jeho hodnotenie. Samozrejme, žiacky výkon v pozorovanom atribúte sa môže odrážať vo viacerých úrovniach.

Veľmi dôležitým krokom pri vytváraní rubriky, ako hodnotiaceho nástroja, je zvoliť si počet úrovní, pre ktoré bude vybraný atribút pozorovaný. Vzhľadom na to, že počet úrovní rubriky nie je striktne daný, zváženie počtu úrovní je založené na potrebách hodnotiteľa. V prvom rade, základnú formu, predstavuje dvojúrovňová rubrika popisujúca výkon žiakov ako „splnil – nesplnil". Základné, už zaužívané systémy rubrík, sú založené na aspoň troch úrovniach. Napríklad, trojúrovňový systém indikátorov žiackeho výkonu podľa Košťálovej et al. (2008):

3 – indikátor dobrého výkonu,

2 – indikátor menej dobrého výkonu,

1 – indikátor nevydareného výkonu.

Častejšie sa však využíva systém rubrík, ktorý obsahuje štyri úrovne zostupne popísaných výkonov žiakov od 3 – excelentné, 2 – adekvátne, 1 – potrebuje vylepšenie a 0 – neadekvátne (Starý & Laufková, 2016). Určenie vyššieho počtu úrovní v rubrikách pre hodnotenie žiackych výkonov umožňuje podrobnejší popis miery kvality pre naplnenie kritérií. Je však správne zhodnotiť nutnosť konkrétnejšieho popisu, a teda voľby vyššieho počtu úrovní, v závislosti od potrieb hodnotiteľa.

Vybrané hodnotiace atribúty je nakoniec potrebné pre jednotlivé úrovne popísať. Je potrebné brať do úvahy, že slovný popis výkonu žiaka na určitej úrovni, musí vychádzať z predchádzajúcich úrovní a teda musí zahŕňať v sebe výkon na nižších úrovniach. Úrovne, ktoré popisujú žiacky výkon na seba postupne nadväzujú a plynule prechádzajú z nižšej úrovne na vyššiu. Zostavená rubrika predstavuje sadu kritérií pre kvalitu výkonu, ktorú možno porovnať s hodnoteným výstupom.

Rubriky pre hodnotenie predstavujú univerzálny nástroj pre hodnotenie alebo pozorovanie úrovne výkonov žiakov v ľubovoľne zvolených atribútoch. Nie je však nevyhnutné, aby rubriky boli využité výlučne pre popis úrovni vedomostí alebo kompetencií. Rubriky poskytujú priestor pre sledovanie širšieho záberu výkonov alebo aj ďalších prejavov žiakov. Napríklad, môže byť sledované, správanie žiakov pri samostatnej alebo tímovej spolupráci v komunikácii alebo motivácii (Baker & Salas, 1992). Výkon v riešení matematických problémov má v postupe riešenia tiež hierarchickú štruktúru (Cígler, 2018), teda rubriky predstavujú vhodný nástroj aj pre zostavenie kritérií pre hodnotenie úrovne výkonu žiakov v písomnej správe, ako výsledku otvorených matematických problémov.

Do učiteľskej praxe sú už zaradené hierarchické štruktúry, ktoré pomenovávajú výkony žiakov na rôznych úrovniach. Tieto štruktúry, taxonómie, boli vytvorené pre klasifikáciu, respektíve hľadanie rozdielov vo vedomostiach na rôznych úrovniach. Taxonómia je nástroj, ktorý je využitý pre formuláciu cieľov pre ľubovoľné vzdelávacie predmety na základe vzdelávacieho programu (Bloom et al., 1956). Existujúce taxonómie sa líšia v ich samotnom určení pre hodnotenie, a z toho vyplýva aj počet úrovní hodnotenia. Spoločnou črtou je vyjadrenie úrovní prostredníctvom tzv. aktívnych slovies alebo krátkym formatívnym popisom klasifikovanej úrovne (Lokhoff et al., 2010).

Najpoužívanejšiu taxonómiou pre klasifikáciu úrovne vzdelávacích cieľov na poli všeobecnej didaktiky je Revidovaná Bloomova taxonómia vzdelávacích cieľov. Vznikla v 50. rokoch minulého storočia a dodnes predstavuje základ pre kategorizáciou úrovní vedomostí, schopností alebo zručností žiakov. Jej autorom je pedagogický psychológ Benjamin S. Bloom v spolupráci s ďalšími jeho kolegami (Enelhart, Furst, Hill, Krathwohl). Originálna Bloomova taxonómia vzdelávacích cieľov popisuje na šiestich úrovniach kognitívne procesy vzostupne dosahujúce určitú mieru abstrakcie: zapamätanie si, porozumenie, aplikácia, analýza, triedenie a hodnotenie (Bloom et al., 1956). Opäť, jednotlivé úrovne sú navzájom prepojené, vyššie úrovne už v sebe zahŕňajú splnenie nižších úrovní.

Prvú úroveň v Bloomovej taxonómií vzdelávacích cieľov predstavuje základnú vedomosť vo forme zapamätania si pojmov, algoritmov, myšlienok alebo vo všeobecnosti povedané, javov. Zapamätanie, ako vzdelávací cieľ, na prvej úrovni sa prejavuje najmä v testovacích situáciách, reprodukciou cieľových vedomostí alebo opakovaním faktov. Druhá úroveň predstavuje najširšiu kategóriu intelektuálnych vedomostí a schopností. Porozumenie v sebe zahŕňa spracovanie zapamätaného javu na trochu hlbšej úrovni, ako napríklad preformulovanie vedomostí, prípadne prepis javu na symbolický zápis, základná forma experimentovania, vďaka ktorému si žiak potvrdí porozumenie daného javu (Bloom et al., 1956; Marzano & Kendall, 2007). Na tretej úrovni kognitívnych procesov vie žiak bez hlbšieho vysvetlenia alebo zdôvodnenia aplikovať zapamätané a opakované javy (Forehand, 2010). Hlbšiu analýzu je možné v žiackych výkonoch pozorovať až na štvrtej úrovni kognitívnych procesov. Hovoríme o identifikácii vzťahov alebo štruktúr medzi javmi, ktorými sú organizované. Na piatej úrovni žiaci dokážu vzťahy a javy spájať do správne formulovaných viet a štruktúr, ktoré predstavujú požadované a vopred naplánované abstraktné vzťahy. Najvyššiu úroveň kognitívnych procesov žiakov predstavuje vyhodnotenie všetkých postupov a záverov, ako forma rozhodovania na dobre premyslenej a vedomej úrovni. Žiaci sú schopní vyvodzovať úsudky o využiteľnosti nimi vytvorených vlastností alebo záverov v rámci kognitívnych procesov (Bloom et al., 1956; Marzano & Kendall, 2007).

Na základe potreby požiadaviek stále rozvíjajúcich sa výučbových metód a stratégií, sa takto definovaná taxonómia vzdelávacích cieľov tiež prispôsobovala novým trendom moderného vyučovania. Na prelome storočí došlo nielen k obnove terminológie, ale aj k rozšíreniu dimenzií vzdelávacích cieľov do Revidovanej Bloomovej taxonómie vzdelávacích cieľov: na dimenziu vedomostí (to, čo má majú žiaci vedieť) a dimenziu kognitívnych procesov (aké procesy boli použité). Dimenzia vedomostí ako dimenzia kognitívnych procesov priamo vychádza z pôvodnej šesťúrovňovej schémy popisujúcej kognitívne ciele (Forehand, 2005). Vo všeobecnosti, využívanie taxonómií spočíva práve v rozlišovaní odlišných úrovní myslenia, respektíve správania. Myslenie, nielen v matematike, je aktívnym procesom, kedy použitie slovies namiesto podstatných mien vymedzuje jednotlivé kognitívne úrovne presnejšie (Vincejová, 2013). A aj z tohto dôvodu viedla zmena formulácie úrovní kognitívnych procesov v Revidovanej Bloomovej Taxonómii vzdelávacích cieľov využitím aktívnych slovies: zapamätať si, porozumieť, aplikovať, analyzovať, zhodnotiť, vytvoriť (Anderson & Krathwohl, 2001).

V súčasnosti je Revidovaná Bloomova taxonómia vzdelávacích cieľov využívaná na poli všeobecnej didaktiky, ako aj v odborových didaktikách akademických predmetov na presnú formuláciu cieľov vo výučbe daného predmetu, ale aj pre vyjadrenie prejavenej úrovne kognitívnych procesov u žiakov. Jednotlivé úrovne sú definované prostredníctvom tzv. aktívnych slovies. Aktívne slovesá pre jednotlivé úrovne sú rozdelené nasledovne (Vincejová, 2013):

1. **Zapamätať si:** definovať, opakovať, reprodukovať, doplniť, identifikovať, zoradiť, opísať, vymenovať.
2. **Porozumieť:** ilustrovať, vysvetliť, rozlíšiť, uviesť príklad, skontrolovať.
3. **Aplikovať:** aplikovať, vyriešiť, používať, vypočítať, rozlíšiť.
4. **Analyzovať:** analyzovať, rozlíšiť, porovnať, určiť príčiny a dôsledky, vysvetliť prečo.
5. **Zhodnotiť:** argumentovať, kriticky posúdiť, obhájiť, zdôvodniť, zhodnotiť, preveriť.
6. **Tvoriť:** klasifikovať, kombinovať, vytvoriť, skonštruovať, navrhnúť nový postup, diskutovať, vyvodiť závery, kategorizovať.

Cieľom vytvorenia Revidovanej Bloomovej taxonómie vzdelávacích cieľov bolo vytvoriť formu univerzálneho kodifikačného systému, prostredníctvom ktorého by mohli byť navrhované, prípadne časom upravované, vzdelávacie ciele aj s istou hierarchickou organizáciou, ktorá zároveň umožňuje ich sledovanie a splnenie na rôznych úrovniach kognitívnych procesov (Lokhoff et al., 2010).

4/ HODNOTENIE OTVORENÝCH MATEMATICKÝCH PROBLÉMOV

Z povahy otvorených matematických problémov zameraných na matematické skúmanie vyplýva, že pri procese ich riešenia sa od žiakov očakáva otvorenosť v ich myslení. Postup riešenia otvorených matematických problémov nie je vopred zrejmý ani jasný, možno len predpokladať, akým spôsobom sa žiaci v riešení môžu vybrať. Pri hodnotení písomných riešení v matematickom skúmaní je neštandardný prístup hodnotiteľa nevyhnutný. Aj keď je, samozrejme, matematická správnosť riešenia dôležitá, očakávaným výstupom riešenia otvorených matematických problémov by nemal byť iba fakt, že žiaci dokážu problémy vyriešiť. K úspešnému riešeniu sa neočakáva len využitie konkrétnych algoritmov, ale, naopak, otvorenosť a tvorivý prístup riešiteľov. Rovnaký podiel na posúdení úspešného či vyhovujúceho riešenia má tak i výber stratégie, a to, akým spôsobom je tento výber zdôvodnený. Taktiež, ktoré vedomosti a algoritmy boli v riešení použité a akým spôsobom sú vo výsledku interpretované.

Cieľom analýzy písomných žiackych riešení otvorených matematických problémov bol návrh univerzálneho nástroja pre hodnotenie úrovne prejavených matematických kompetencií a demonštrovaných matematických vedomostí žiakov. Vychádzajúc z daného cieľa a z odbornej literatúry boli v rámci skúmanej problematiky stanovené nasledovné výskumné otázky:

Aké sú atribúty, ktoré popisujú a na základe ktorých možno hodnotiť kvalitu písomného riešenia otvorených matematických problémov prostredníctvom matematických kompetencií?

Existujú aspekty, na základe ktorých možno popísať mieru matematickej správnosti a úroveň prejavených atribútov kreativity?

Aký prostriedok je vhodný na vytvorenie kritérií pre hodnotenie písomných žiackych riešení otvorených matematických problémov?

4.1
Metodológia výskumu

Postup vytvárania hodnotiaceho nástroja nadväzoval na výskum v diplomovej práci s názvom „Matematické hlavolamy, záhady a rébusy a ich využiteľnosť v matematickej gramotnosti“. V práci boli hodnotené písomné žiacke riešenia neštandardných matematických problémov, ktoré mali charakter matematických hlavolamov, z rôznych oblastí matematiky. Päť vybraných problémov bolo predložených žiakom deviateho ročníka základných škôl a žiakom prvého ročníka stredných škôl. Celkovo sa na riešení zúčastnilo 235 žiakov z ôsmich škôl. Žiaci boli vyzvaní čo najpodrobnejšie slovne popísať postup, akým dospeli k riešeniu problému. Hodnotenie spočívalo v spojení systému 12 matematických kompetencií podľa Lukáča & Sekeráka (2011) s úrovňou náročnosti problému na základe dimenzie kognitívnych procesov Revidovanej Bloomovej taxonómie vzdelávacích cieľov. Na základe takto vytvorenej hodnotiacej tabuľky (obrázok 4.1) sa následne bodovali žiacke riešenia pre určenie úrovne matematickej gramotnosti žiakov. Riešeniam boli priradené body podľa dosiahnutej úrovne matematickej gramotnosti (Bulková, 2015)

Obrázok 4.1: Bodovacia tabuľka pre hodnotenie matematickej gramotnosti prostredníctvom prejavených matematickýh kompetenci

Matematická kompetencia (úroveň mat. gramotnosti)	Ú1	Ú2	Ú3	Ú4	Ú5
(1) práca s informáciami a interpretácia výsledku	1b	1b	1b	1b	1b
(2) matematizácia problému, využívanie pojmov, faktov a priestorovej predstavivosti	1b	1b	1b	1b	1b
(3) využívanie symboliky, písomný a grafický prejav	1b	1b	1b	1b	1b
(4) položenie si otázky, vymedzenie problému a opis mat. javov	1b	1b	1b	1b	1b
(5) matematická argumentácia a dôkaz	1b	1b	1b	1b	1b

(Bulková, 2015)

Následne, bolo cieľom identifikovať a slovne popísať atribúty a kritériá pre hodnotenie písomných žiackych riešení otvorených matematických problémov. Analyzované boli písomné žiacke riešenia žiakov gymnázií z tímovej matematickej súťaže Matematický B-deň.

Súťaže sa môžu zúčastniť žiaci stredných škôl, kde v troj- až štvorčlenných tímoch spolupracujú na riešení otvoreného matematického problému a na základe vzájomnej spolupráce a zdieľania vedomostí odovzdajú riešenie vo forme písomnej správy. Súťaž je pôvodom z Holandska a vznikla na podnet holandskej vlády ako požiadavka na skúmanie nielen obsahových, ale aj procedurálnych vedomostí u sedemnásťročných žiakov. Určená je žiakom so záujmom o prírodovedné a technické vzdelávanie, zaradených do B-formy osnov predmetu matematika v Holandsku. Na základe rozdelenia osnov predmetu matematika je odvodený i názov súťaže, Wiskunde B-dag (Mathematics B-day). V slovenskom názve súťaže ponechané písmeno B symbolizuje prvé písmeno slova „Bádanie". Od roku 1999, organizácia a tvorba zadania prebieha pod záštitou Freudenthalovho inštitútu na univerzite v Utrechte (Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education), ktorý na medzinárodnom poli vedie výskum v oblasti rozvoja a zavádzania inovatívneho vzdelávania v oblasti vyučovania matematiky. Rovnako tak aj súťaž predstavuje jednu z možností, ako zapísať objavné vyučovanie matematiky do povedomia žiakov a učiteľov. Jej podstata taktiež spočíva v tímovej spolupráci, ktorej rozmer zasahuje aj do organizácie súťaže a do hodnotenia riešení, ktoré žiaci vypracovali. V rámci Slovenskej republiky sa súťaž organizuje od roku 2011 v rámci riešenia projektu 7RP PRIMAS, ako aktivita vhodná pre implementáciu objavného vyučovania matematiky (www.primas.ukf.sk).

Zadanie súťaže tvorí súvislý text v rozsahu 10 až 20 strán skomponovaný z gradovaných matematických problémov a vysvetľujúcich komentárov týkajúcich sa daného problému a celej reálnej situácie. Zadanie obsahuje problémy, ktoré sa zaraďujú medzi problémy s otvoreným zadaním, otvorenou cestou a otvoreným cieľom. Podstatou je hľadať čo najviac rôznych stratégií riešenia a postup riešenia slovnou, písomnou, formou vhodne opísať (Čeretková, 2017). Problém predstavuje reálnu situáciu, s ktorou sú žiaci na začiatku textu oboznámení. Postupným definovaním pojmov a riešením úvodných navádzajúcich úloh sa žiaci dostávajú hlbšie do problému a sú postupne nútení problémovú situáciu matematizovať. Žiaci tak plynule prechádzajú k riešeniu otvorených matematických problémov, ktoré nakoniec vedú k originálnemu skúmaniu v matematike a vytváraniu matematického modelu zadanej reálnej situácie. Úlohou tímu žiakov je v priebehu siedmich hodín sa spoločnými silami dostať hlbšie do problému a postupne problémovú situáciu nielen matematizovať ale i modelovať. Okrem plánovania stratégie riešenia, rozdelenia úloh v tíme a určenia postupov, ktorými sa bude tím uberať, je podstatné dokázať si aj správne rozvrhnúť čas určený na riešenie. Žiaci majú totiž za úlohu svoje postupy a riešenia, závery a úvahy spísať do záverečnej správy, ktorá je hodnoteným výstupom. Za jeden tím sa predkladá jedna záverečná správa (Čeretková, 2014).

Žiaci v súťaži spolupracujú na riešení základného a hlavného zadania. Základné zadanie obsahuje problémy vyžadujúce rôzne úrovne matematického myslenia a matematického skúmania. Inými slovami, v zadaní sú použité problémy s rôznou mierou otvorenosti (od uzatvorených štandardných problémov po problémy s otvorenou cestou aj s otvoreným cieľom) a vzhľadom na ich náročnosť si pre riešenie vyžadujú rôznu úroveň kognitívnych procesov. Žiaci sú pri riešení danej problematiky postupne vedení a motivovaní k ponoreniu sa do matematického skúmania. Na neho nadväzujúce hlavné zadanie je sformulované tak, aby sa žiaci na záver zamerali na vytvorenie matematického modelu[3], pričom hlavné zadanie je nadväzujúce na riešenia problémov v základnom zadaní. Vzhľadom na povahu súťaže, od žiakov je vyžadovaný podrobný popis ich postupu riešenia. Písomné žiacke riešenia takýchto otvorených matematických problémov sú bohatým zdrojom pre sledovanie autentických myšlienkových procesov a využitých matematických kompetencií žiakov.

Pre splnenie cieľov výskumu boli analyzované kompletné záverečné správy riešiteľov súťaže Matematický B-deň. Výskumnú vzorku tvorili autentické hodnotené výstupy z piatich ročníkov súťaže, ktoré boli organizované v rokoch realizácie výskumu. Zapojenie žiakov s rôznym matematickým zázemím do tímovej spolupráce, podporuje pri riešení problému, ako výzvy, hlbší rozvoj matematického uvažovania a kreatívnu tvorbu stratégií riešenia problémov (Powel, 2009). Celkové počty analyzovaných písomných žiackych riešení za analyzované ročníky súťaže sú detailne uvedené nižšie v tabuľke 4.1:

Tabuľka 4.1: Prehľad analyzovaných písomných žiackych riešení v tímovej súťaži Matematický B-deň v rokoch 2015–2019

Rok	Názov	Počet hodnotených záverečných správ	Počet zúčastnených žiakov
2015	Za rohom...	35	138
2016	Výborná sada hracích kociek	21	84
2017	Šípové hodiny	29	113
2018	Hadíkovo hniezdo	33	131
2019	Spoj a panuj	29	115

Všetky zadania súťaže Matematický B-deň sú zostavované tímom odborníkov z Freundenthalovho inštitútu Univerzity v Utrechte, pričom sa častokrát nechávajú inšpirovať zložitými problémami z rôznych oblastí matematiky vyžadujúce vysokú úroveň kognitívnych procesov. Predstavíme si zadania súťaže, s riešeniami ktorých sa pracovalo v čase realizácie výskumu. Všetky zadania v slovenskom, ako aj

3 Prepojenie reálneho sveta s matematikou v zmysle Weinhandl & Lavicza (2021) ako lineárny sled reálnej situácie, reálneho modelu, matematického modelu a číselných operácií a výsledkov.

v anglickom jazyku sú dostupné oficiálnej webovej stránke súťaže pre Slovenskú republiku (www.primas.ukf.sk).

Známym otvoreným problémom „The Sofa Problem" bolo inšpirované zadanie súťaže z roku 2015 „Za rohom...". Jedná sa o dvoj-dimenzionálny problém z kombinatorickej geometrie, ktorý je formulovaný nasledovne: „Aký útvar, ktorý má čo najväčší povrch, môže byť premiestnený okolo pravouhlého rohu chodby so šírkou 1 meter?" (Wagner, 1976). Matematické skúmanie v zadaní je tak zamerané na hľadanie parametrov takéhoto útvaru. Žiaci v zadaní využívajú poznatky z planimetrie, zhodných geometrických zobrazení, geometrie trojuholníkov, ale aj funkcií a grafov funkcií. Odporúčaným nástrojom na podporu riešenia je dynamický geometrický softvér GeoGebra.

Ústrednou témou v zadaní „Výborná sada hracích kociek" súťaže Matematický B-deň z roku 2016 bola pravdepodobnosť výhry v hre s kockami. Nehovoríme pritom o kockách ako o telese, ale o hracích kockách. Poukazujeme na rozdiel práve preto, že hracie kocky nemuseli mať práve šesť stien a na stenách mohli mať rôzne hodnoty. V hre žiaci používajú a následne vytvárajú tzv. falošnú sadu hracích kociek, pre ktorú platí pravidlo: pre každú zo sady hracích kociek vždy existuje hracia kocka s vyššou pravdepodobnosťou výhry, ale na druhej strane aj táto vybraná hracia kocka má vždy oproti inej hracej kocke vyššiu pravdepodobnosť výhry. Inými slovami vo falošnej sade hracích kociek existuje cyklus pravdepodobností výhry. Úlohou žiakov v hlavnom zadaní bolo vytvoriť matematický model tvorby takejto falošnej sady *n* hracích kociek s ľubovoľným počtom stien.

V súťažnom ročníku 2017 s názvom „Šípové hodiny" bolo zadanie tvorené z oblasti teórie čísel. Výpočty a riešenie problémov boli zamerané najmä na deliteľnosť čísel a zvyškové triedy, ale tiež na funkcie, planimetriu a zhodné zobrazenia v geometrii. Navyše, pre zjednodušenie v následnom matematickom skúmaní, bola žiakom v zadaní predstavená relácia kongruencie *modulo n*. Šípové hodiny majú rozdelený ciferník na n zhodných častí, kde každému z bodov x ohraničujúcich túto časť je priradený iný bod na základe určitého predpisu: $x \to ax + b$, kde *a, b* sú prirodzené čísla. Hlavné zadanie je potom zamerané na hľadanie vlastností a pravidiel, ktoré vo všeobecnosti platia pre rôzne predpisy šípových hodín.

Súčasným otvoreným problémom v matematike s názvom „The Moser´s Worm Problem" boli inšpirovaní tvorcovia i pri zostavovaní zadania z ročníka 2018 „Hadíkovo hniezdo". Cieľom bolo nájsť tvar a minimálnu plochu rovinného útvaru, ktorý by pokryl všetky možné polohy ľubovoľnej krivky, ktorá má danú pevnú dĺžku (Norwood, Poole & Laidacker, 1992). Pôvodný problém bol obmenený na príbeh o hadovi Lene, ktorý má dĺžku 15 cm a potrebuje si vyrobiť čo najmenšiu prikrývku. Žiaci postupne skúmajú rozmery základných rovinných útvarov ako kruh, obdĺžnik, kosoštvorec, ale postupne sú vyzývaní z týchto útvarov uberať nepotrebnú plochu, teda nevyužité časti hadovej prikrývky. Téma je opäť z oblasti kombinatorickej geometrie a vyžaduje využitie vedomostí z planimetrie, trojuholníkovej geometrie a kombinatoriky.

Matematický B-deň 2019 s názvom „Spoj a panuj“ sa odvíjal od jednoduchej hry pre dvoch hráčov, ktorí sa vo svojom ťahu striedajú. Prehráva hráč, ktorý už nemôže uskutočniť svoj ťah. Hracie pole tvoria tzv. uzly, ktoré majú ľubovoľný počet výstupov, v hre nazvané ako chvosty. Napríklad, ak uzol má tvar krížika (+), potom má spolu štyri chvosty. Ťah hráča spočíval v spojení dvoch nepoužitých chvostov cez spojovaciu čiaru tak, že žiadna z vytvorených spojovacích čiar nemôže byť pretnutá. Na novú spojovaciu čiaru potom musí hráč nakresliť nový uzol so štyrmi chvostami (+). Pokiaľ hráč, ktorý je na ťahu, nemôže vykonať ťah, hra sa končí jeho prehrou. Žiaci počas riešenia zadania odhaľujú princípy stratégie výhry pre rôzne hracie polia. Skúmanie ich vedie k matematizovaniu stratégie výhry pre rôzne variácie hracieho poľa.

Návrh hodnotiaceho nástroja pre hodnotenie písomných žiackych riešení otvorených matematických problémov bol vytvorený vo forme už spomínanej hodnotiacej tabuľky, rubriky.

Princíp rubrík poskytuje stupňovité formatívne hodnotenie a zároveň aj spätnú väzbu o riešení tak pre hodnotiteľov, ako aj pre riešiteľov. V prvom rade je pre vytvorenie rubriky, ako hodnotiacej tabuľky, potrebné zvoliť si počet úrovní, pre ktoré bude výkon žiakov sledovaný. V teoretickej časti tejto práce boli uvedené príklady rubrík, ktoré boli vytvorené pre tri, maximálne štyri úrovne. Počet úrovní nie je striktne daný. Avšak pre detailnejší popis sa dá zvoliť aj viac úrovňová rubrika pre hodnotenie, čím možno zabezpečiť presnejšie hodnotenie žiakovho výkonu v danej aktivite. Ako adekvátny základ pre identifikáciu úrovní bola využitá dimenzia kognitívnych procesov Revidovanej Bloomovej taxonómie vzdelávacích cieľov, ktorá pozostáva zo šiestich popísaných úrovní výkonov žiakov.

Na prvej úrovni (zapamätať si) žiaci využívajú len vedomosti z dlhodobej pamäte a známe štandardné postupy. Žiaci sú schopní pracovať len na základnej úrovni a interpretovať výsledky jednoduchým spôsobom, a to preformulovaním zadania. Na druhej úrovni kognitívnych procesov (porozumieť) žiaci sú schopní pochopiť podstatu zadania a premýšľať o úlohe alebo probléme viac matematicky. Na druhej úrovni, je využívaná hlavne základná terminológia, základné matematické operátory alebo grafický náčrt situácie. Avšak riešeniu chýba určité systematizovanie. Na tretej úrovni (aplikovať) žiaci nazerajú na problém viac komplexnejšou cestou: žiaci vedia prepísať slovné zadanie do formálneho matematického zápisu, pracujú s algebrickými symbolmi a využívajú priestorovú predstavivosť, ale najmä aplikujú získané matematické vedomosti a postupy. Kladenie otázok ohľadom problému predstavuje prvý krok ku štvrtej úrovni (analyzovať) dimenzie kognitívnych procesov. Známky vyšších kognitívnych procesov v matematickom myslení indikuje rozdelenie celkového zadania na čiastkové problémy, ktoré ale stále navzájom súvisia. Ich vzájomné spätné prepojenie predchádza zhodnotenie predchádzajúceho postupu žiakov na piatej úrovni kognitívnych procesov (zhodnotiť), čo zahŕňa zovšeobecnenie vlastností alebo dôkaz správnosti výsledku, ktorý je podložený matematickou argumentáciou. Na najvyššej úrovni kognitívnych procesov v matematickom myslení (tvoriť) vytvárajú žiaci vlastnú teóriu, prínosy, respektíve matematický model (Krathwohl, 2002).

Na základe šesťúrovňovej rubriky pre hodnotenie je možné, na stanovených úrovniach, dôkladnejšie popísať výkony žiakov, čím sa predchádza situácii nerozhodného určenia úrovne. Výber dimenzie kognitívnych procesov Revidovanej Bloomovej taxonómie vzdelávacích cieľov, ako základ vytvorenia hodnotiaceho nástroja, zaručuje pokrytie hodnotenia aj pre vyššie úrovne matematického myslenia dosahujúce objavovanie v matematike alebo matematické modelovanie. Spôsob zostavenia rubrík sa v stĺpcoch odvíja od úrovne zvládnutia hodnoteného atribútu a v riadkoch sú sledované už konkrétne hodnotené atribúty, v tomto prípade matematické kompetencie. Ako východisko pre vytváranie popisu výkonu žiakov v rubrikách pre hodnotenie úrovne matematických kompetencií v písomných žiackych riešeniach otvorených matematických problémov bola využitá už spomínaná tabuľka pre hodnotenie matematickej gramotnosti (Bulková, 2015), ktorej hierarchická štruktúra bola založená na kompetenčnom modeli podľa Lukáča & Sekeráka (2011). Matematické kompetencie boli rozdelené a zaradené pre každú zo šiestich úrovní (tabuľka 4.2).

Tabuľka 4.2: Triedenie matematických kompetencií pre jednotlivé úrovne podľa dimenzie kognitívnych procesov Revidovanej Bloomovej taxonómie vzdelávacích cieľov.

1. zapamätať si	používanie pomôcok, práca s informáciami
2. porozumieť	pojmy, fakty, tvrdenia a postupy v matematike, využitie symbolických, formálnych a technických vyjadrení a operácií
3. aplikovať	znázornenie a popísanie matematických objektov a situácii
4. analyzovať	položenie otázky, na základe ktorej nasleduje vymedzenie problému a jeho riešenie
5. hodnotiť	matematická argumentácia a dokazovanie
6. tvoriť	matematické modelovanie

Obdobie analýzy žiackych riešení prebiehalo v rokoch 2015–2019 možno rozdeliť do niekoľko fáz. V úvode realizácie výskumu boli analyzované len vybrané otvorené problémy zo zadania ročníka súťaže s názvom „Za rohom...“. Vybrané boli také otvorené problémy, ktoré boli zamerané na matematické dokazovanie, zovšeobecňovanie vlastností alebo zovšeobecňovanie pravidiel. Zámerom bolo sledovanie spoločných prvkov v riešiteľských postupov žiakov a odvodenie vhodných atribútov pre hodnotenie úrovne písomných žiackych riešení. Tabuľka 2.2 pre hodnotenie úrovne prejavených matematických kompetencií predstavovala základ pre vytvorenie súboru rubrík pre hodnotenie písomných žiackych riešení otvorených matematických problémov.

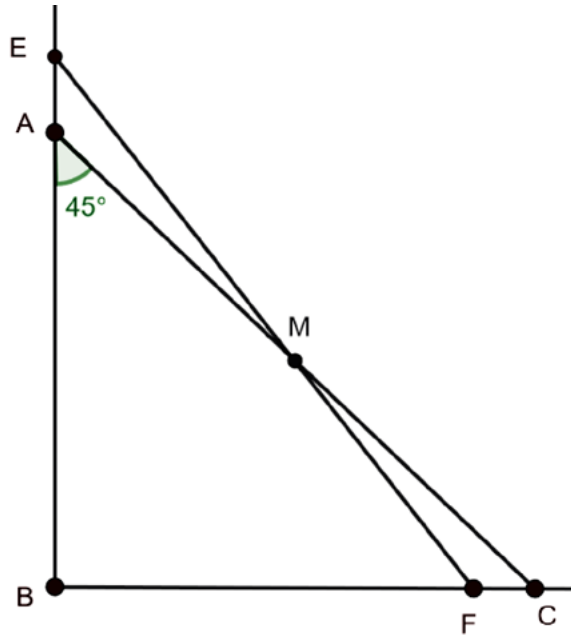
Je potrebné podotknúť, že všetky uvedené písomné riešenia (žiacke a neskôr aj študentské) nie sú upravované. To znamená, že pre zachovanie autenticity sú písomné riešenia ponechané v pôvodnom znení, formátovaní rovníc ako aj v ponechaní pôvodných obrázkov.

4.2 Analýza písomných žiackych riešení

Kľúčovým problémom pre sledovanie týchto spoločných prvkov bol úvodný problém 4.1, ktorý vyžadoval od žiakov vytvoriť matematický dôkaz v trojuholníkovej geometrii:

> **Problém 4.1:** „Daný je rovnoramenný trojuholník ABC; bod M je stred strany AC. Bod F leží medzi vrcholmi B a C trojuholníka ABC vo vnútri strany BC. Priamka FM pretína priamku, na ktorej leží strana AB v bode E (obrázok 4.2). Dokážte, že úsečka EF je dlhšia ako úsečka (strana trojuholníka) AC." (Matematický B-deň: Za rohom..., 2015, s. 3).

Obrázok 4.2: Trojuholník zo zadania dôkazového problému 2.1



Vytvorené pilotné rubriky popisovali atribúty, pre ktoré boli písomné žiacke riešenia hodnotené na základe úrovne prejavených matematických kompetencií (v riešení zadaných matematických problémov v základnom zadaní) a na základe úrovne prejavených procesov objavného vyučovania (v hlavnom zadaní súťaže, ktoré bolo zamerané na vytvorenie matematického modelu konkrétnej situácie).

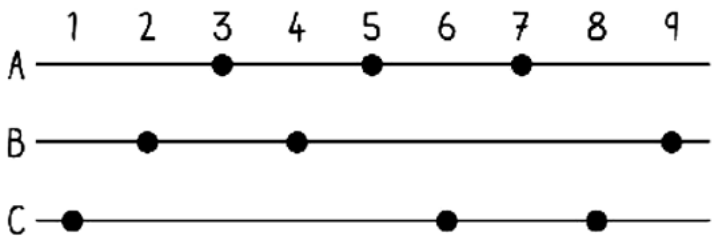
V priebehu organizácie a vyhodnotenia (december 2016 – marec 2017) nadchádzajúceho ročníka súťaže Matematický B-deň 2016 s názvom „Výborná sada hracích kociek“ boli pilotné rubriky aplikované ako hodnotiaci nástroj písomných žiackych riešení pre určenie úspešných riešiteľov súťaže v danom ročníku. K vytvoreniu a formulovaniu nových teoretických záverov boli žiaci vyzvaní až v časti hlavného zadania. Z tohto dôvodu, pre hodnotenie problémov zahrnutých v základnom zadaní, bolo využitých prvých päť úrovní z rubriky pre hodnotenie prejavených matematických kompetencií. Pre hodnotenie úrovne matematického skúmania vo vytváraní matematického modelu v hlavnom zadaní, bola aplikovaná pilotná rubrika pre hodnotenie prejavených procesov objavného vyučovania. Každý vyriešený problém bol ohodnotený počtom bodov, ktorý prislúchal aj pozorovateľnej úrovni využitej šesťúrovňovej rubriky založenej na dimenzii kognitívnych procesov Revidovanej Bloomovej taxonómie vzdelávacích cieľov. Porovnanie výsledného bodovania, ktoré členovia jednotlivých tímov v riešeniach dosiahli, bolo nerozhodné.

Čo potvrdilo predpoklad, že pre hodnotenie otvorených matematických problémov bude potrebné popísať nové atribúty pre hodnotenie úrovne písomných žiackych riešení. Pre analýzu nových atribútov boli, ako kľúčové, vybrané problémy zo zadania súťaže „Výborná sada kociek“, zamerané na vytvorenie matematického dôkazu (problém 4.2), matematické zdôvodňovanie (problém 4.3) a zovšeobecňovanie pravidiel (problém 4.4):

Problém 4.2: „Majme dve kocky s nasledujúcou vlastnosťou: ak sa na niektorej stene na kocke *A* nachádza určitý počet bodiek, tento istý počet bodiek sa potom nemôže nachádzať na žiadnej stene na kocke *B*.
Vysvetlite, že potom platí: $\omega(A,B)\ +\ \omega(B,A) = 1$.“ (Matematický B-deň 2016: výborná sada hracích kociek, s. 6).

Problém 4.3: „Vysvetlite, ako sa dá na základe bodkového diagramu (obrázok 4.3) vypočítať hodnota pravdepodobnosti výhry kocky *A* a hodnota pravdepodobnosti výhry kocky *B*?“ (Matematický B-deň 2016: Výborná sada hracích kociek, s. 8).

Obrázok 4.3: Bodkový diagram zo zadania problému 2.3



Problém 4.4.: „Hracie kocky *G: 1,4,4; H: 3,3,3 a I: 2,2,5* sú kocky falošnej sady. … Upravte pravdepodobnosť výhry jednotlivých kociek zmenou počtu všetkých stien kociek tak, aby každá kocka mala 21 stien. Kocka *G* bude teda mať na svojich stenách n jednotiek a $21 - n$ štvoriek. … Kocka *H* má 21 trojok. … Kocka *I* má n pätiek a $21 - n$ dvojok. Akú hodnotu n by mal Róbert zvoliť, ak chce dosiahnuť, aby najnižšia pravdepodobnosť výhry bola pre jednotlivé kocky čo najvyššia možná?“ (Matematický B-deň 2016: Výborná sada hracích kociek, s. 12).

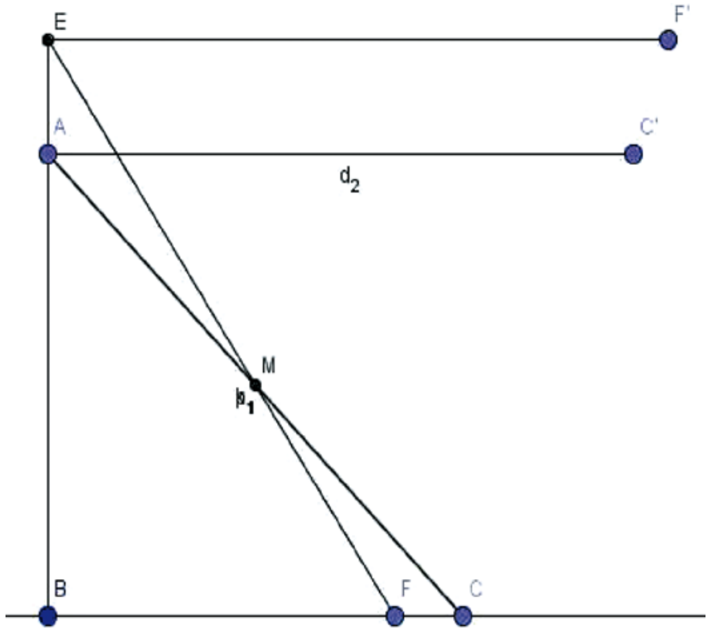
Analýza žiackych riešení vybraných problémov, v spojení so štúdiami zameranými na danú problematiku, ukázala potrebu zohľadnenia viacerých aspektov: písomný prejav žiakov a kreativita v písomných žiackych riešeniach. Pre zaručenie objektívneho hodnotenia písomných žiackych riešení boli dané atribúty rozdelené, navyše, aj na popis úrovní pre tri rôzne aspekty. Zostavený systém rubrík tak hodnotil písomné žiacke riešenia otvorených matematických problémov, respektíve vytvorený matematický model, z pohľadu siedmych aspektov.

V ďalších ročníkoch organizácie a vyhodnoteniach súťaže Matematický B-deň boli rubriky aplikované opäť za účelom vyhodnotenia úspešných riešiteľov súťaže. Vzhľadom na povahu rubrík, ako nástroja formatívneho hodnotenia, boli jednotlivé popisy výkonov žiakov použité aj ako spätná väzba pre zúčastnených riešiteľov súťaže. Rovnako tak dochádzalo k prípadným popisu pre jasnejšie a presnejšie hodnotenie výkonu žiakov na rôznych úrovniach a tým aj pre zvýšenie objektivity hodnotenia písomných žiackych riešení otvorených matematických problémov.

Prvým krokom pre identifikáciu atribútov pre vytvorenie hodnotiacich rubrík bola analýza autentických písomných žiackych riešení z ročníka súťaže Matematický B-deň s názvom „Za rohom..." Pre ilustráciu pozorovania žiackych riešení sú uvedené riešenia už vyššie uvedeného problému, ktorý vyzýva žiakov ku sformulovaniu matematického dôkazu (problém 4.1). Žiaci vo svojich riešeniach využili rôzne vedomosti z matematiky, ako aj rôzne stratégie pre dokázanie platnosti tvrdenia.

Riešenie 4.1.1: „Nakreslíme si obrázok podľa zadania. Cieľom úlohy je dokázať, že úsečka *EF* je dlhšia, než úsečka *AC*. Jeden zo spôsobov, akým by sa dala úloha riešiť, je otáčať bod *F* okolo bodu *E* a bod *C* okolo *A*, a to do takej pozície, aby boli obe úsečky vodorovne. Z toho vidíme, ktorá úsečka je dlhšia, a to *EF*.“

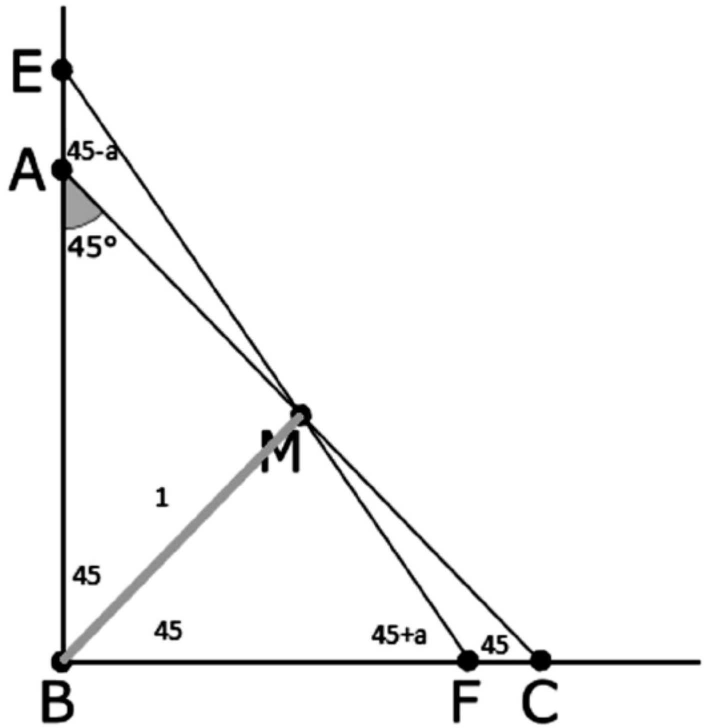
Obrázok 4.4: Žiacke riešenie 4.1.1 k dôkazovému problému 4.1



Tím žiakov pri uvedenom riešení 4.1.1 zvolili konštruktívny typ dôkazu s využitím rotácie úsečky okolo bodu. Pre vizualizáciu žiaci využili dynamický softvér GeoGebra. Jedná sa o nápaditý a jednoduchý spôsob, ako ukázať správnosť tvrdenia, avšak len pre daný konkrétny prípad. V dôkaze tak chýba zdôvodnenie, či je dané tvrdenie platné aj pre iné prípady, teda či je platné vo všeobecnosti. Taktiež je v riešení pozorovateľné, že pri písaní riešiteľského postupu, nie je zjavná schopnosť využitia správnej matematickej terminológie a argumentácie. Inými slovami, aj napriek preukázaniu schopnosti vnímať súvislosti medzi matematickými objektmi a ich vlastnosťami, využili pri svojom opise riešenia neformálnu argumentáciu. Napríklad, namiesto vyjadrenia „… aby boli obe úsečky vodorovne.“ bolo potrebné použiť formuláciu „..kým úsečky nebudú rovnobežné s ramenom trojuholníka BC.“.

Riešenie 4.1.2: „Z obrázku (2.5) vidíme nejaké skutočnosti, ktoré si môžeme zapísať: $sin \propto = \frac{x}{a}$ a $cos \propto = \frac{x}{b}$. Ďalej vieme, že $a + b = |EF|$, teda $a + b = \frac{x}{sin\propto} + \frac{x}{cos\propto} = |EF|$. Z tejto závislosti dĺžky EF od rozdielu uhlov ($\sphericalangle BFM - \sphericalangle BCM$) vieme z grafu vyčítať, že $|EF|$ je najkratšia ak rozdiel je 0. Zo zadania vyplýva, že $(\varDelta\sphericalangle) > 0$ teda $|EF|$>$|AC|$."

Obrázok 4.5: Žiacke riešenie 4.1.2 k dôkazovému problému 4.1



Na prvý pohľad riešenie vzbudzuje dojem, že riešitelia disponujú matematickými kompetenciami pre skonštruovanie matematického dôkazu. Žiaci vo svojom riešení síce využívajú formálne zápisy, vzorce a symboly, ale celková formulácie ich zdôvodnenia je nejasná. Najmä z toho dôvodu, že žiaci sa síce odvolávajú na obrázok (4.5), ale v obrázku nie je znázornené a vyznačené, aké parametre zastupujú označenia, *a, b* alebo ∝. Formulácia všeobecného záveru nie je správna. Záver nie je aplikovateľný ako dôkaz platnosti všeobecného tvrdenia. Okrem nesprávnosti záveru, je možné v písomnom žiackom riešení pozorovať nedostatky vo využívanej symbolike alebo vo využívaní matematickej terminológie.

Riešenie 4.1.3: „Nech odvesny trojuholníka ABC sú *a, b, a* (strany *BC, AC, BA*). Prepona *b* má teda dĺžku 2·a². Ak stranu *a* zmenším o *b*, podľa Pytagorovej vety sa rovnica zmení na:

$$(x-k)^2+(x+k)^2=a^2-2ak+k^2+a^2+2ak+k^2=2a^2+2k^2 \quad (1)$$

Čo je po porovnaní s preponou trojuholníka ABC väčšie o $2k^2$. Z toho vyplýva, že prepona pravouhlého rovnoramenného trojuholníka je vždy menšia, ako prepona všetkých ostatných pravouhlých trojuholníkov, ktorých súčet dĺžok odvesien je zhodný so súčtom dĺžok odvesien tohto trojuholníka.“

Žiaci sa v riešení 4.1.3 rozhodli dokázať zadané tvrdenie prostredníctvom Pytagorovej vety. Princíp riešenia je aplikovateľný ako všeobecný dôkaz, avšak kvôli chybným vyjadreniam sa celková správnosť dôkazu stráca. Závažná chyba sa vyskytuje už v predpoklade. Na základe Pytagorovej vety, má prepona *b* dĺžku $a\sqrt{2}$. Žiaci by zrejme predošli takejto chybe, ak by si vyjadrili aj pôvodný vzťah neupravených dĺžok odvesien trojuholníka ABC. V prípade použitia správneho vyjadrenia dĺžky prepony by potom bolo následne potrebné aj preformulovať záver dôkazu. Ďalšia podstatná chyba sa ukazuje v označení premenných vo vzťahu (1), kde žiaci udali nesprávnu premennú x ako označenie odvesny trojuholníka ABC.

Ku každej z uvedených autentických ukážok bol vytvorený slovný komentár, pričom pri ich posudzovaní boli pozorované prejavené matematické kompetencie. Jednalo sa však o zhodnotenie len troch vybraných žiackych riešení, teda vytvoriť adekvátne slovné hodnotenie nebolo náročné. Pri komplexnom hodnotení písomných žiackych riešení otvorených matematických problémov je nevyhnutné využívať univerzálny hodnotiaci nástroj, ktorý by pokrýval aj širšie aspekty ukazujúce prejavenú úroveň žiakov v písomných riešeniach. V slovných komentároch k autentickým ukážkam sa vyskytujú rozdiely najmä vo formulácii riešenia, vo využívaní matematickej terminológie, aplikácii obrázkov, ale aj voľbe stratégie pre vytvorenie riešenia a miera správnosti a následne použiteľnosti výsledku.

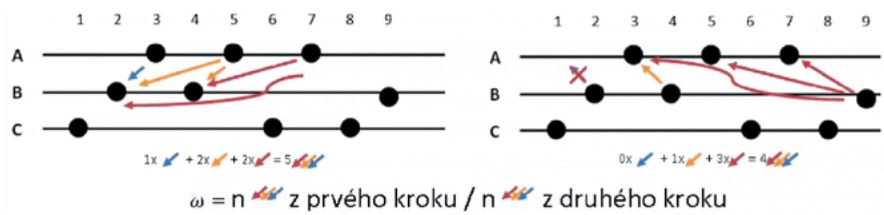
Tieto atribúty boli pozorované v písomných správach riešiteľských tímov z ročníka súťaže Matematický B-deň 2016 s názvom „Výborná sada hracích kociek“. Ako ukážky boli vybrané tri autentické žiacke riešenia vyššie uvedeného problému 4.3, ktorého podstata spočíva v matematickom zdôvodňovaní pri interpretácii diagramu. Pri posudzovaní kvality písomného prejavu v žiackych riešeniach pritom bolo pozorované, ako sa v riešeniach prejavujú alebo prípadne aj odlišujú kvality podľa Howisona (dostupné na: mathematicscentre.com/).

Riešenie 4.3.1: „Pravdepodobnosť vypočítame tak, že každú guličku porovnáme s každou a zapíšeme si koľko krát guličky vyhrali a koľko krát prehrali. Zapíšeme si zlomok v tvare:
POČET VÍŤAZSTIEV/CELKOVÝ POČET POROVNANÍ."

Prvá ukážka žiackeho riešenia 4.3.1 neukazuje u žiakov schopnosť matematického zdôvodňovania alebo vytvorenia súvislého matematického textu. Z vytvoreného riešenia totiž nie je čitateľovi jasná podstata problému, ale ani parametre, s ktorými žiaci v riešení operujú. Pri popisovaní riešenia nie je pozorovateľná ani matematická argumentácia a formulácia prostredníctvom matematickej terminológie, napr. namiesto „gulička" by bolo vhodné použiť napríklad „bod diagramu". Rovnako tak záverečný vzťah pre výpočet pravdepodobnosti nie je jasne definovaný.

Riešenie 4.3.2: „Pri počítaní z bodkového diagramu musíme spočítať všetky možnosti, pri ktorých je bod z bodkového diagramu jednej kocky vyššie na číselnej osi ako bod z bodkového diagramu druhej kocky. Ak teda počítame pravdepodobnosť *ω(A,B)*, najprv si zoberieme prvý bod na diagrame kocky *A* a teda bod *3*. Existuje 1 bod na diagrame kocky *B*, ktorý sa nachádza na číselnej osi nižšie a to bod *2*. Teraz si zoberieme druhý bod z diagramu kocky *A*, to je bod *5*. Na diagrame kocky sú dva body nachádzajúce sa nižšie ako bod *5*. Posledný zoberieme bod *7* z diagramu kocky *A* a zistíme, že sú takisto dva body diagramu kocky *B* nachádzajúce sa nižšie na číselnej osi. Tento istý princíp použijeme pri počítaní kocky *B* vzhľadom na kocku *A*. Výsledok je, že pri kocke *A* vzhľadom na kocku *B* je práve 5 takýchto možností, pričom pri kocke *B* vzhľadom na kocku *A* sú možnosti 4. Celkový počet možností vypočítame ako *3x3*, pretože máme 3 body pre každú kocku a tieto body môžu mať maximálne *3x3* vzájomných polôh. Preto pravdepodobnosť $\omega(A,B) = \frac{5}{9}, \omega(B,A) = \frac{4}{9}$.

Obrázok 4.6: Žiacke riešenie 4.3.2 bodkového diagramu z problému 4.3



V porovnaní s predchádzajúcim riešením 4.3.1, má riešenie 4.3.2 formu súvislého textu, v ktorom žiaci detailne popisujú svoju interpretáciu diagramu. Text je prehľadný, zrozumiteľný a najmä doplnený o vizualizáciu situácie (obrázok 4.6).

Vysvetlenie je však neformálne a nie je podopreté o relevantnú matematickú argumentáciu. Navyše, žiaci vo svojom riešení označujú číslicami body na diagrame, ako aj počty. Počty pritom sú niekedy uvedené číslom, niekedy uvedené slovne. Takýto prejav je pre čitateľa mätúci, najmä ak číslice označujú aj body diagramu.

Riešenie 4.3.3: „Nech *A(x)* značí počet bodiek na riadku A, ktoré sa nachádzajú za číslom *x* analogicky *B(x)* a *C(x)* (napríklad $A(3) = 2$). Ak na kocke B hodíme x, tak kocka A vyhrá práve vtedy, ak na nej padne vyššie číslo ako x. Z troch čísel, ktoré sú na kocke A, je padnutie každého rovnako pravdepodobné a *A(x)* je takých, pri ktorých A vyhrá, čiže pravdepodobnosť výhry A to je $\frac{A(x)}{3}$. Sú 3 možné a rovnako pravdepodobné hodnoty, ktoré môžu padnúť na B, čiže celková pravdepodobnosť, že vyhrá A, je:

$$\boxed{\omega(A,B) = \frac{1}{3} \times \frac{A(2)}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{A(4)}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{A(9)}{3} = \frac{1}{9}\big(A(2) + A(4) + A(9)\big).}$$

Podobne $\omega(B,A) = \frac{1}{9}\big(A(2) + A(4) + A(9)\big)$. Ak to dosadíme, dostaneme $\omega(A,B) = \frac{5}{9}$ a $\omega(B,A) = \frac{4}{9}$ čo sa zhoduje s predchádzajúcimi výsledkami."

V riešení 4.3.3 žiaci preukázali úsilie svoje riešenie zmatematizovať. Písomné riešenie predstavuje súvislý matematický text, ktorý však môže byť kvôli nepresnej formulácii nejasný. Interpretáciu diagramu žiaci poňali cez všeobecné vyjadrenie premennej *x*, avšak vzťah premennej definovaný cez priradenie počtu hodnôt *A(x)* nie je jasne definovaný. Ďalšie drobné nedostatky vo formulácii textu výrazne neovplyvňujú matematickú úroveň a mieru správnosti záveru.

Ukážky pre analýzu autentických písomných žiackych riešení, s ohľadom na mieru prejavenej kreativity, boli vybrané riešenia k otvorenému problému 2.4, ktorý vyžaduje od žiakov zovšeobecnenie a vyjadrenie parametra *n*. Pozorovanými aspektami boli najmä štýl spájania vedomostí do finálnych záverov alebo do akej miery je výsledný záver správny a aplikovateľný.

Riešenie 4.4.1: „...budeme sa snažiť maximalizovať najnižšie pravdepodobnosti výhry pre $\omega(G,H), \omega(H,I)$ a $\omega(I,G)$. Z predošlej časti vieme, že $\omega(I,G) = \frac{(21-n)\cdot m + 21\cdot n}{21^2} > \frac{8}{9}$.
Ďalšia podmienka pre n je, že musí byť z množiny čísel {0, 1, 2,..., 21}, keďže n ani $21 - n$ nemôže byť záporné číslo. V prvej podmienke sa dostaneme k súčinovému tvaru $(n-7)\cdot(n-35) < 0$. Prienik celočíselných riešení tejto nerovnice a množiny 0, 1, 2,...., 21 je množina 8, 1, 2,..., 21.
Teraz sa pozrime, v ktorých prípadoch je ktorá z pravdepodobností menšia.

Najprv predpokladajme $\frac{(21-n)\cdot n+21\cdot n}{21^2} > 1-\frac{n}{21}$. Po úpravách zistíme, že táto podmienka je splnená práve vtedy, keď *n* je z množiny {9, 10, 11,..., 21} (už sme brali do úvahy aj podmienku, že *n* je z množiny {8, 1, 2,..., 21}). Na tejto množine zrejme nadobúda výraz $1-\frac{n}{21}$ maximum práve pre $n = 9$.
Ak $\frac{(21-n)\cdot n+21\cdot n}{21^2} < 1-\frac{n}{21}$ tak jediná hodnota pre *n* je 8.
Teraz už stačí iba porovnať hodnoty výrazu $\frac{(21-n)\cdot n+21\cdot n}{21^2}$ pre $n = 8$ a výrazu $1-\frac{n}{21}$ pre $n = 9$. Po porovnaní zisťujeme, že platí $\frac{(21-8)\cdot 8+21\cdot 8}{21^2} < 1-\frac{9}{21}$. Teda aby najnižšie z pravdepodobností *ω(G, H)*,*ω(H, I)* a *ω(I, G)* bola čo najvyššia. Róbert by mal zvoliť $n = 8$."

Žiaci v riešení 4.4.1 problému využili vedomosti, ku ktorým sa dopracovali v predchádzajúcich riešeniach. Hlavným prostriedkom je vzťah pre vyjadrenie pravdepodobnosti javov. Úvaha a štýl vedenia riešenia je správna, ale v definovaní predpokladov nie je správne definovaná podmienka vyhovujúcej množiny riešení. Po náprave daných nedostatkov a rozšírení prvotných predpokladov, by riešenie mohlo byť aplikovateľné na problémy s podobným zámerom.

Riešenie 4.4.2: „$\omega(G,H) = \omega(H,I)$, čiže nás zaujíma len $\omega(G,H), \omega(I,G)$, kde $\min\left(\omega(G,H), \omega(I,G)\right) = \left(1-\frac{n}{21}, \frac{42n-n^2}{441}\right)$. *n* je celé nezáporné číslo a ako ukazuje tabuľka (obrázok 2.7), optimálna hodnota je $n = 8$".

Obrázok 4.7: Žiacke riešenie problému 4.4

n	1-n/21	(42n-n^2)/441	min
0	1	0	0
1	0,952381	0,092970522	0,092971
2	0,904762	0,181405896	0,181406
3	0,857143	0,265306122	0,265306
4	0,809524	0,344671202	0,344671
5	0,761905	0,419501134	0,419501
6	0,714286	0,489795918	0,489796
7	0,666667	0,555555556	0,555556
8	0,619048	0,616780045	0,61678
9	0,571429	0,673469388	0,571429
10	0,52381	0,725623583	0,52381
11	0,47619	0,77324263	0,47619
12	0,428571	0,816326531	0,428571
13	0,380952	0,854875283	0,380952
14	0,333333	0,888888889	0,333333
15	0,285714	0,918367347	0,285714
16	0,238095	0,943310658	0,238095
17	0,190476	0,963718821	0,190476
18	0,142857	0,979591837	0,142857
19	0,095238	0,990929705	0,095238
20	0,047619	0,997732426	0,047619
21	0	1	0

Žiaci vo svojom riešení využili k realizácií výpočtov program, na základe ktorého vyhodnotili parameter n s rozložením čísel na všetkých troch hracích kockách s najnižšou pravdepodobnosťou. Záver je síce správny, ale nie je v popise podložený o predchádzajúce alebo nové matematické vzťahy. Z uvedeného záveru nemožno pokračovať v riešení iných, podobných, otvorených matematických problémov.

5/ SYSTÉM RUBRÍK PRE HODNOTENIE PÍSOMNÝCH ŽIACKYCH RIEŠENÍ OTVORENÝCH MATEMATICKÝCH PROBLÉMOV

Na základe analýzy autentických žiackych riešení, ktorej ukážka bola uvedená v predchádzajúcej podkapitole, bol zostavený pilotný systém rubrík ako celku pre hodnotenie vybraných atribútov: matematické kompetencie, procesy objavného vyučovania, písomný prejav žiakov a miera kreativity v žiackych riešeniach. Základom pre popis úrovní bolo priradenie matematických kompetencií zo systému podľa Lukáča & Sekeráka (2011) do úrovní dimenzie kognitívnych procesov Revidovanej Bloomovej taxonómie vzdelávacích cieľov. Vytvoreniu adekvátneho popisu jednotlivých úrovní pre vybrané atribúty predchádzala aj detailná analýza štúdií zameraných na danú problematiku.

Rubrika pre hodnotenie matematických kompetencií sa teda priamo odvíja od hodnotiacej tabuľky zostavenej na základe priradenia matematických kompetencií k zodpovedajúcej úrovni dimenzie kognitívnych procesov podľa Revidovanej Bloomovej taxonómie vzdelávacích cieľov. Zodpovedajúce matematické kompetencie bolo potrebné pre jednotlivé úrovne sformulovať do slovného komentára, ktorý presne popisuje a vystihuje prejavený výkon žiakov odrážajúci istú úroveň výkonu (tabuľka 5.1) .

Tabuľka 5.1: Šesťúrovňová rubrika pre hodnotenie matematických kompetencií

MATEMATICKÉ KOMPETENCIE	
ÚROVEŇ	POPIS VÝKONU ŽIAKA
1.	Žiak vie spracovať informácie v zadaní a využiť dostupné pomôcky.
2.	Žiak využíva symbolické, formálne a technické vyjadrenia a ovláda základné matematické pojmy, fakty, tvrdenia a postupy.
3.	Žiak znázorňuje a popisuje matematické objekty, pracuje s vlastnosťami medzi nimi.
4.	Žiak vie vymedziť problém, stanoviť základnú otázku, zvoliť stratégiu a problém vyriešiť, využíva matematické myslenie a usudzovanie.
5.	Žiak využíva matematickú argumentáciu, vie skonštruovať dôkaz.
6.	Žiak vytvára matematický model.

(Bulková & Čeretková, 2017a)

Práve Revidovaná Bloomova taxonómia vzdelávacích cieľov má široké využitie taktiež pri tvorbe a stanovení si požiadaviek pre meranie úrovne základných kompetencií, prípadne aj ako porovnávací nástroj pri rozlíšení základnej úrovne kognitívnych procesov a úrovne vyšších kompetencií, ktoré žiaci prejavili v riešiteľskom procese (Marzano & Kendall, 2007).

Takto zostavená rubrika pre hodnotenie úrovne matematických kompetencií v písomných žiackych riešeniach je určená na hodnotenie riešení otvorených matematických problémov vyžadujúcich rôzne úrovne kognitívnych procesov. V hlavnom zadaní súťaže boli žiaci vyzvaní vytvoriť matematický model zadanej situácie. Vzhľadom na povahu zadania hlavného problému, pozorovanie úrovne matematických kompetencií od najnižšej úrovne už je bezpredmetné.

Pri hodnotení vytvoreného matematického modelu je potrebné pozorovať aspekty, ktoré už priamo poukazujú matematické myslenie na najvyššej úrovni a teda proces matematického modelovania. A naopak, v štruktúre procesov objavného vyučovania predstavuje matematické modelovanie najvyššiu úroveň matematického myslenia. Pomocou rubrík je možné sledovať dosiahnutú úroveň, ktorú možno pozorovať v písomných žiackych riešeniach problému, ktorý je zameraný na objavovanie v matematike a matematické modelovanie prostredníctvom procesov matematického modelovania: zjednodušovanie a štruktúrovanie, systematické pozorovanie, meranie, klasifikácia, vytváranie definícií, triedenie informácií, objavovanie vzťahov a prepojení, určovanie množstva, experimentovanie, modelovanie, kontrola premenných, vizualizácia, komunikácia (Janečková & Čeretková, 2011; PRIMAS, 2013).

Rubrika pre hodnotenie úrovne matematického modelovania žiakov (tabuľka 5.2) bola zostavená prostredníctvom štruktúry procesov objavného vyučovania. Úrovniam procesov objavného vyučovania bol vytvorený slovný komentár tak, aby na jednotlivých úrovniach odrážala výkon žiakov v tvorbe matematického modelu.

Tabuľka 5.2: Šesťúrovňová rubrika pre hodnotenie procesov objavného vyučovania

MATEMATICKÉ MODELOVANIE	
ÚROVEŇ	POPIS VÝKONU ŽIAKA
1.	Žiak systematicky pozore viditeľné a opakujúce sa princípy, ktoré sa ukazujú pri riešení problémov. Informácie, relevantné k objavovaniu vie roztriediť a v prípade aj vizualizovať. Hlavnou metódou je experimentovanie.
2.	Žiak pracuje s pozorovateľnými princípmi v konkrétnych číslach a mierach. Žiak pri meraní a určovaní množstva kontroluje a udržiava jednotnosť premenných.
3.	Žiak objavuje medzi pozorovanými princípmi prepojenia a vzťahy, ktoré postupne zjednodušuje a vytvára z nich samostatné štruktúry.
4.	Žiak vie vytvoriť hypotézy a predpoklady pre ďalšie skúmanie.
5.	Žiak vie potvrdiť svoje predpoklady, tvorí úsudky a definície.
6.	Žiak vytvára súvislý matematický model.

(Bulková & Čeretková, 2017)

Ďalším hodnoteným atribútom bol písomný prejav žiakov v riešeniach. Ako už vyplýva z povahy otvorených matematických problémov, dôležitým faktorom pri kvalite výsledku, respektíve riešenia, je aj cesta a výber stratégie. Riešitelia súťaže Matematický B-deň, sú v zadaní hneď v úvode upozornení, aby pri vytváraní záverečnej písomnej správy dbali na efektívnosť a vhodnosť slovného opisu, formu a štylizáciu. Písomná správa, ktorú predkladajú jednu za celý tým je totiž hodnoteným výstupom a má obsahovať všetky výpočty prepojené slovným opisom. Podmienkou vysokej kvality záverečnej písomnej správy je, aby riešeniu rozumel aj čitateľ, ktorý zadanie problému nepozná, ale má dostatočné vedomosti z matematiky a to, aby porozumel aj odbornému vyjadreniu matematického modlu. Z tohto dôvodu sa od žiakov vyžaduje zachovanie matematickej argumentácie a zdôvodňovania.

Kritériá pre hodnotenie písomného prejavu žiakov v matematike boli vybrané pre potreby hodnotenia písomnej správy ako riešenia otvoreného matematického problému v troch kritériách: obsah písomnej správy (tabuľka 5.3), využívanie matematickej argumentácie (tabuľka 5.4) a jasnosť a čitateľnosť textu (tabuľka 5.5). Popisy výkonov žiakov boli pre jednotlivé úrovne sformulované v súlade so zásadami tvorby písomného riešenia v matematike podľa Košťálovej et al. (2008): úplnosť, použitie terminológie, čitateľnosť textu, plynulosť textu a spisovnosť. Záverečná písomná správa predstavuje hodnotený produkt a zahŕňa vypracovaný report s originálnymi a autentickými riešeniami otvoreného matematického problému. Písomná správa musí zodpovedať zásade úplnosti. Musí obsahovať všetky údaje a myšlienky riešiteľa, respektíve tímu riešiteľov a použité informácie musia byť relevantné k problému. Text je plynulý, vety na seba nadväzujú a nevyskytujú sa v ňom duplicitné, pojmy, výrazy alebo myšlienky.

Tabuľka 5.3: Šesťúrovňová rubrika pre hodnotenie obsahu písomnej správy v písomnom prejave žiakov

OBSAH PÍSOMNEJ SPRÁVY	
ÚROVEŇ	POPIS VÝKONU ŽIAKA
1.	Písomná správa nespĺňa kritériá pre špecifikáciu písomného riešenia problému. Použité informácie nie sú relevantné.
2.	Písomná správa nemá formu písomného riešenia problému. Väčšina informácii je relevantných, ale roztrúsených a nie úplne zrozumiteľných. Obrázky a tabuľky neslúžia pre podporu textu, sú len ilustračné.
3.	Písomná správa sa skladá z viacerých častí tvoriacich menšie slovné postupy riešenia, ktoré na seba nenadväzujú. Miestami využité obrázky a tabuľky nie sú správne označené, prehľadné.
4.	Písomná správa sa skladá z viacerých celkov, ktoré na seba väčšinou nadväzujú. Celistvosť písomného riešenia problému je narušená, pretože chýbajú dôležité prepájajúce detaily.
5.	Písomná správa má formu záverečnej správy, matematického súvislého textu. Celistvosť textu je iba mierne narušená, pretože chýbajú drobné detaily. Použité tabuľky, grafy či obrázky sú miestami neprehľadné.
6.	Písomná správa má formu súvislého matematického textu, informácie sú presné a relevantné. Využité obrázky, tabuľky sú prehľadné a správne označené.

(Bulková, 2017)

Pri tvorbe matematického textu je nevyhnutná správna formulácia a využívanie matematickej terminológie. Práve správnej a logickej matematickej argumentácii je v písomných žiackych riešeniach venovaná osobitná pozornosť, tak ako pri využívaní známej terminológie, ale aj terminológie zavedenej riešiteľmi pre potrebu riešenia. Dôležitosť dodržania matematickej argumentácie v písomnom žiackom riešení otvorených matematických problémov zachováva odbornosť v písanom texte. Podľa Bergqvist & Lithner (2005) argumentácia znamená odôvodnenie, respektíve jeho časť, ktorá má najmä pri riešení problematickej situácie presvedčiť o vhodnosti, odbornosti a presnosti.

Toto kritérium bolo vybrané práve z toho dôvodu, aby riešitelia, teda žiaci, sa formulovaním súvislého textu neodkláňali od matematickej podstaty riešenia v otvorených matematických problémoch. Na druhej strane, aby si upevnili zručnosť a uvedomili dôležitosť využívania odbornej terminológie v konkrétnom zameraní, namiesto používania nesprávne zaužívaných vyjadrení. Rubrika pre hodnotenie využívania matematickej argumentácie (tabuľka 5.4) v písomnom prejave žiakov teda popisuje kvalitu hĺbky skúmania a procesu matematického myslenia, ale s ohľadom na odbornú formuláciu postupov a nájdených záverov.

Tabuľka 5.4: Šesťúrovňová rubrika pre hodnotenie využívania matematickej argumentácie v písomnom prejave žiakov

MATEMATICKÁ ARGUMENTÁCIA	
ÚROVEŇ	POPIS VÝKONU ŽIAKA
1.	Písomná správa pozostáva len z domnienok a úvah, je radou neštruktúrovaných údajov. V texte nie je vôbec využitá matematická terminológia.
2.	Písomná správa sa neopiera o existujúce fakty. Využíva základnú matematickú terminológiu, ale matematická argumentácia absentuje alebo nie je jasná.
3.	Písomná správa obsahuje občasnú matematickú argumentáciu, avšak v rámci celého riešenia chýba matematické zdôvodňovanie.
4.	Argumentácia sa opiera o informácie potrebné pre prácu s matematickým textom. Použité zdôvodňovanie pripomína matematický dôkaz.
5.	Písomná správa obsahuje matematické dôkazy podporené matematickou argumentáciou, ale nie sú vysvetlené všetky prepojenia medzi jednotlivými bodmi správy alebo medzi zadaniami a riešeniami úloh.
6.	Výsledná písomná správa predstavuje súvislý matematický text organizovaný v logickom slede. V písomnom prejave je plne využitá matematická argumentácia a matematické dôkazy.

(Bulková, 2017)

V tradičnom ponímaní školskej matematiky sú žiaci zvyknutí na jednotnú formu zápisu a riešenia zadaných problémov: zápis, riešenie, skúška a odpoveď. Pri rutinných a štandardných slovných problémoch to predstavuje štandardný formálny postup žiakov. Samozrejme, formálna stránka zápisu matematického riešenia je dôležitá aj pri riešení otvorených matematických problémov. Ale, ako už bolo spomínané, z povahy otvorených matematických problémov vyplýva, že pri formulovaní písomnej správy je sprievodný text k riešeniu nevyhnutný. A jednou z podmienok pri zostavovaní záverečnej písomnej správy riešenia otvoreného matematického problému je, aby textu rozumel aj čitateľ, ktorý nebol oboznámený so zadaním problému.

Pre hodnotenie jasnosti a čitateľnosti textu je preto potrebné brať do úvahy doteraz spomenuté zásady (plynulosť textu, úplnosť, správna terminológia), spolu s kompetenciou tvorivého písania. A teda rubrika pre hodnotenie jasnosti a čitateľnosti textu (tabuľka 5.5) v písomnom prejave žiakov popisuje kvalitu štýlu písania a formy celkového textu.

Tabuľka 5.5: Šesťúrovňová rubrika pre hodnotenie využívania matematickej argumentácie v písomnom prejave žiakov

JASNOSŤ A ČITATEĽNOSŤ TEXTU	
ÚROVEŇ	POPIS VÝKONU ŽIAKA
1.	Text nie je jasný, štylizácia a výber slov nie sú prijateľné. Čitateľ, ktorý zadanie nepozná, by nevedel určiť o čo v zadaní ide.
2.	Text nie je úplne jasný, jazyková štylizácia a výber slov sú jednoduché. Čitateľ, ktorý zadanie nepozná by vedel približne určiť, akej témy sa zadanie týka.
3.	Text je miestami jasný, miestami nie. Jazyková štylizácia a výber slov sú jednoduché. Čitateľ, ktorý zadanie nepozná by vedel približne určiť, akej témy sa zadanie týka.
4.	Text je z väčšej miery jasný ako nejasný, jazyková štylizácia a výber slov sú zväčša efektívne a korešpondujú so zadaním. Čitateľ, ktorý zadanie nepozná by vedel určiť podstatu riešeného problému.
5.	Text je štylisticky jasný. V texte sa vyskytujú menšie chyby, ale do čitateľnosti textu nezasahujú. Čitateľ, ktorý sa nestretol so zadaním sa v riešení vie zorientovať a vie určiť aký problém žiaci riešili.
6.	Text je štylisticky jasný, neobsahuje chyby zasahujúce do podstaty správnosti riešenia. Čitateľ, ktorý sa nestretol so zadaním, sa v riešení vie zorientovať a je schopný bez pochýb určiť, aký problém žiaci riešili.

(Bulková, 2017)

Nie je nevyhnutné, aby žiaci pri tvorbe písomného riešenia za každú cenu vytvárali príbeh alebo zbytočné súvetia. Avšak, zo samotnej definície otvorených matematických problémov vyplýva očakávaná otvorená odpoveď. Tvorba súvislého matematického textu tak vyžaduje podporu schopností dostatočnej argumentácie v spojitosti s tvorivým písaním pre priblíženie situácie čitateľovi. Pomocou rubrík pre hodnotenie písomného prejavu v matematickom texte možno vidieť, a prípadne žiakov upozorniť na vzniknuté nedostatky v písomnom riešení.

S vytváraním záverečnej správy, ako písomného riešenia otvorených matematických problémov, súvisí ohodnotenie kvality matematického riešenia, ako výstupu matematického skúmania. Vzhľadom na pestrosť a väčš počet možných správnych riešení, ktoré vedia žiaci v rámci procesu skúmania vytvoriť, sa pýta popísanie kritérií kreativity ako sledovaného a hodnoteného atribútu v písomných žiackych riešeniach otvorených matematických problémov. Nie je možné totiž striktne rozhodnúť, ktorý zo správnych postupov riešenia a správnych riešení ako výstupov je lepší a hodnotnejší. Kreativita ako sledovaný atribút pri riešení problémových úloh bola teda sledovaná pomocou kritérií definovaných podľa Žáka (2004): originalita (tabuľka 5.6), správnosť výsledku (tabuľka 5.7) a aplikovateľnosť výsledkov a hodnota výsledkov pre ďalšie skúmanie (tabuľka 5.8).

Kreativita predstavuje schopnosť, vďaka ktorej je možné tvoriť myšlienky, predstavovať si niečo nové alebo niečo nové vymyslieť. Je potrebné si uvedomiť, že kreatívne myslenie v matematike, aj vo všeobecnosti, nie je založené na vytvorení niečoho z ničoho. Originálne myšlienky spočívajú v objavovaní a spájaní existujúcich vedomostí a vo využívaní dostupných informácií (Žák, 2004). Z tohto dôvodu je sledovaný dôvtip žiakov pri využívaní dostupných informácií a pri ich prepájaní s osvojenými vedomosťami v rubrike pre hodnotenie miery originality v písomných žiackych riešeniach (tabuľka 5.6).

Tabuľka 5.6: Šesťúrovňová rubrika pre hodnotenie miery originality v rámci kreatívneho myslenia

ORIGINALITA	
ÚROVEŇ	POPIS VÝKONU ŽIAKA
1.	Myšlienky sú len kopírované alebo preformulované zo zadania.
2.	Myšlienky sú vyberané len zo základnej témy, ktorá problém zahŕňa. Preformulovaním problému a jemu blízkych definícií bol vytvorený záver tak, aby vyhovoval zadaniu.
3.	Myšlienky sú vyberané aj z tém, ktoré sú príbuzné základnej téme zadania.
4.	Myšlienky sú vytvorené originálnym popisom a spojením pojmov a predpokladov viacerých tém, ktoré súvisia so zadaním.
5.	Myšlienky sú spájané a kombinované prevažne originálnym spôsobom a spoločne vytvárajú príspevok s vopred premysleným zámerom.
6.	Myšlienky sú kombinované originálne, prekvapujúcim spôsobom problém riešia a vytvárajú nový podnet k pokračovaniu skúmania.

(Bulková & Čeretková, 2017b)

Čo sa týka správnosti žiackych riešení, doteraz bol pri vytváraní rubrík braný ohľad najmä na postup riešenia bez ohľadu na správnosť konečného výsledku. Pre vyhodnotenie riešení, respektíve pre vyjadrenie úrovne správnosti riešenia sa sledovala určitá hranica, do akej miery vzniknuté chyby alebo nejasnosti zasahujú do toho, aby zapísaný výsledok bol korektný. To znamená, že sa sledovala miera správnosti riešenia. Je totiž nevyhnutné, aby pri vytváraní záverov v riešeniach boli splnené požiadavky, ktoré z problému vyplývajú. Definovanie konceptov, vytváranie rovníc, odôvodnenie predpokladov a preukázanie platnosti záverov musí byť súvislé a správne. Už samotné zadanie otvoreného matematického problému, charakter matematického textu, je akýmsi „odrazovým mostíkom“ pre výber relevantných informácií. Prostredníctvom rubriky pre hodnotenie správnosti výsledkov a záverov (tabuľka 5.7), je tak možné sledovať a určiť mieru správnosti konečných záverov, ale aj mieru správnosti a relevantnosti údajov, ktoré žiaci vo svojom riešení využili.

Tabuľka 5.7: Šesťúrovňová rubrika pre hodnotenie správnosti výsledkov v rámci kreatívneho myslenia

SPRÁVNOSŤ VÝSLEDKOV A ZÁVEROV	
ÚROVEŇ	POPIS VÝKONU ŽIAKA
1.	Výsledok nie je správny. Niektoré informácie nie sú presné. Myšlienky sú založené na nesprávnych hypotézach.
2.	Výsledok ako celok nie je správny, nie je súvislý. Informácie sú roztrúsené a nie sú úplne zrozumiteľné.
3.	Výsledky sú čiastočne správne, avšak kvôli chýbajúcim detailom alebo časti nerelevantných informácií je správnosť výsledného záveru neúplná.
4.	Výsledky sa skladajú z užitočných informácií, z relevantných zdrojov, ale vyskytnuté nejasnosti zasahujú do správnosti výsledného záveru.
5.	Výsledky sú zväčša presné, drobné nepresnosti alebo chýbajúce detaily neovplyvňujú správnosť výsledného záveru.
6.	Výsledky sú presné a podporené dôkazmi.

(Bulková & Čeretková, 2017b)

Nové myšlienky ešte nemusia byť nevyhnutne aplikovateľné pre konkrétny problém, prípadne pri vyššej úrovni, pre podobné alebo iné problémy. Jedna z najštandardnejších chýb v žiackych riešeniach je zapríčinená nepozornosťou a nerozvážnosťou. Je pomerne časté, že žiaci vyvodia záver, ktorého platnosť však neoverili, aspoň na jednom konkrétnom príklade. Kritérium aplikovateľnosti je tak postavené na troch dôležitých faktoroch: každá myšlienka nie je sama o sebe nesprávna, každá myšlienka musí byť overená a unáhlené závery nemusia byť správne. Overenie platnosti vytvorených záverov tiež ponúka istú možnosť kontroly, skúšky. Navyše, uvedomovanie si aplikovateľnosti záverov, aj v širšom ponímaní danej problematiky, dopomáha k potrebe hľadania všeobecného pravidla alebo vlastnosti, ktorá môže byť pre výslednú kvalitu kľúčová. Na základe týchto predpokladov boli popísané úrovne pre hodnotenie kritéria aplikovateľnosti záverov a hodnoty pre ďalšie skúmanie, opäť, v šesťúrovňovej rubrike (tabuľka 5.8).

Tabuľka 5.8: Šesťúrovňová rubrika pre hodnotenie miery aplikovateľnosti záverov a hodnoty záverov pre ďalšie skúmanie v rámci kreatívneho myslenia

APLIKOVATEĽNOSŤ ZÁVEROV A HODNOTA PRE ĎALŠIE SKÚMANIE	
ÚROVEŇ	POPIS VÝKONU ŽIAKA
1.	Záver nereprezentuje nástroj pre vyriešenie problému ani neslúži na iné účely.
2.	Záver obsahuje prvky riešenia niektorých čiastočných problémov, ale nie problému ako celku. Myšlienky sú užitočné pre riešenie konkrétneho problému alebo situácie.
3.	Záver prezentuje nástroj pre vyriešenie konkrétneho problému, ale jeho zovšeobecnenie alebo všeobecné odôvodnenie by vyžadovalo ďalšie rozšírenie.
4.	Záver prezentuje dôležitý nástroj pre vyriešenie rovnakého problému, problému s podobným kontextom alebo blízkej disciplíny. Je možné urobiť s menšími úpravami univerzálny nástroj.
5.	Záver prezentuje univerzálny nástroj pre vyriešenie problému s rovnakým alebo podobným kontextom alebo blízkej disciplíny.
6.	Záver predstavuje univerzálny nástroj pre rôzne disciplíny.

(Bulková & Čeretková, 2017b)

Pri riešení otvorených matematických problémov, ako samostatnej práce, si riešiteľ buduje svoje kľúčové kompetencie a rozvíja svoju úroveň matematickej gramotnosti. Prostredníctvom rubrík, ako hodnotiaceho nástroja, je možné v tíme žiakov, prípadne aj u žiaka ako jednotlivca, sledovať vývoj matematického myslenia a vybraných kompetencií, ako aj poskytnutie istej formy spätnej väzby, formatívneho hodnotenia.

6/ APLIKÁCIA SYSTÉMU RUBRÍK PRI HODNOTENÍ PÍSOMNÝCH RIEŠENÍ

Rubriky boli vytvorené ako objektívny nástroj pre hodnotenie písomných žiackych riešení otvorených matematických problémov. K riešeniu otvorených matematických problémov pristupujú žiaci tvorivo, pričom vychádzajú najmä z vlastných vedomostí. Pri hodnotení riešenia je teda potrebné sústrediť svoju pozornosť na jednotlivé kroky riešenia, na úvahy a na použité argumenty. Úroveň výkonu žiakov sa potom odráža v rubrikách, ako hodnotiacom nástroji.

Už zostavené rubriky boli aplikované na hodnotenie štyroch ročníkov tímovej súťaže Matematický B-deň, ktorých témami boli: Výborná sada hracích kociek (2016), Šípové hodiny (2017), Hadíkovo hniezdo (2018) a Spoj a panuj (2019). Na vybraných príkladoch zo spomenutých ročníkov bude najprv ukázaná priama aplikácia rubrík pre hodnotenie ako aj pre zostavenie spätnej väzby pre riešiteľov otvorených matematických problémov. Následne, študentom učiteľstva pre primárne vzdelávanie bol predložený set s problémami rôzneho charakteru, ktoré boli čerpané z úloh Matematickej olympiády pre žiakov prvého stupňa základných škôl. Ako ukážka aplikácie rubrík pre hodnotenie písomných riešení boli vybrané dva z riešených problémov.

Tabuľka 6.1: Skratky pre kódovanie hodnotených atribútov

Hodnotenie riešení problémov zo základného zadania	Matematické kompetencie	MKom
Hodnotenie riešenia hlavného zadania	Procesy objavného vyučovania v matematickom modelovaní	HZ_IBL
Písomný prejav žiakov	Obsah písomnej správy	ppO
	Matematická argumentácia	ppA
	Jasnosť a čitateľnosť textu	ppJ
Kreativita	Originalita	krO
	Správnosť výsledkov a záverov	krS
	Aplikovateľnosť záverov a hodnota pre ďalšie skúmanie	krA

V oboch prípadoch hodnotenie jednotlivých aspektov bolo kódované číselným označením konkrétneho problému, skratkou hodnoteného atribútu (podľa tabuľky 6.1) a hodnotou, ktorá bola riešeniu priradená na základe prejavených schopností.

Napríklad, ak bola v riešení problému 5a pozorovateľná matematická argumentácia na štvrtej úrovni, bol danému tímu pridelený kód 5a_ppA (hodnotenie matematickej argumentácie v probléme 5a), pričom mu bola priradená hodnota 4. Ak tím žiakov v riešení hlavného zadania potvrdil svoje predpoklady a žiaci vytvárali úsudky, teda piata úroveň v hodnotení procesov objavného vyučovania, kód hodnoteného atribútu pre daný tím bol HZ_IBL s priradenou hodnotou 5.

6.1 Aplikácia rubrík pre hodnotenie písomných žiackych riešení v súťaži Matematický B-deň

Vytvoreným systémom rubrík boli písomné žiacke riešenia súťaže Matematický B-deň hodnotené s ohľadom na to, či sa jednalo o problémy z časti základných zadaní alebo o hlavné zadanie. Riešenia problémov zo základného zadania boli hodnotené na základe pozorovaných matematických kompetencií žiakov. Samotné problémy v základnom zadaní zvyknú byť formulované a zostavované tak, aby žiakov viedli k hlbšiemu porozumeniu problematiky pre následné modelovanie situácie. Riešeniam problémov bola priradená hodnota od 1 až po 5 na základe toho, akú úroveň matematických kompetencií žiaci vo svojich riešeniach prejavili. Keďže hlavné zadanie bolo už zamerané na vytváranie matematického modelu, prejavenie vyšších matematických kompetencií už bolo predpokladané. Riešeniam hlavného zadania tak bola priradená hodnota od 1 po 6 podľa rubriky pre hodnotenie úrovne prejavených procesov objavného vyučovania v matematickom modelovaní. Ďalšie dva atribúty, písomný prejav žiakov pri vytváraní matematického textu a miera kreativity prejavenej pri riešení otvorených matematických problémov, boli pozorované pri všetkých jednotlivých problémoch základného zadania, ako aj v hlavnom zadaní, na všetkých úrovniach, teda na stupnici od 1 po 6.

Šípové hodiny

V prvej ukážke bola vybraná dôkazová úloha a k nej vybrané štyri žiacke riešenia, z ročníka súťaže Matematický B-deň 2017 s názvom „Šípové hodiny“:

> **Problém 6.1**: „*Dokážte, že platí: Každé číslo je cieľový bod, ak číslo a a číslo n sú nesúdeliteľné*.“ (Matematický B-deň 2017: Šípové hodiny).

Pre objasnenie problému je potrebné priblížiť niektoré skutočnosti zo zadania. Tvrdenie má byť vo všeobecnosti platné pre predpis $x \longrightarrow ax + b$ v šípových hodinách, ktoré majú ciferník rozdelený na n rovnakých častí. Počiatočným bodom je myslená premenná $x \in \{1,2, \ldots, n\}$ na ciferníku šípových hodín. Cieľový bod je teda odvodený od hodnôt $a, b \in N$. Žiaci si pre dokázanie tvrdenia mohli vybrať ľubovoľnú stratégiu a prostriedky. Cieľom bolo dokázať, že každý z bodov ciferníka je zároveň aj cieľovým bodom pre inú ľubovoľnú hodnotu z ciferníka šípových hodín

> **Riešenie 6.1.1**: „Každé číslo je cieľový bod, ak číslo a a číslo n sú nesúdeliteľné. Poďme na to sporom. Všeobecne platí: $yx = x(mod(n))$. Aby to všeobecne platilo pre súdeliteľné a a n, y by tiež muselo byť súdeliteľné s n a deliteľné a. To však nevieme zabezpečiť, keď dosadzujeme za y všetky čísla. Preto si myslíme, že to dokazuje, že každé číslo je cieľový bod, ak číslo a a číslo n sú nesúdeliteľné.“

> **Riešenie 6.1.2**: „Teraz dokážeme, že každé číslo je cieľový bod, ak číslo a a číslo n sú nesúdeliteľné pre pravidlo $x \rightarrow ax$. Ich NSD je 1, preto $n/NSD(n,a) = n$, takže nám vznikne n-uholník, kde každý bod bude cieľovým bodom.“

> **Riešenie 6.1.3**: „Vieme, že ak aa a nn sú nesúdeliteľné, každý bod je cieľový. Ako sme už spomínali, aj pre $NSD = 1$, nedokážeme vybrať pred zátvorku žiadne číslo okrem 1, a teda každé číslo je zastúpené práve raz.“

> **Riešenie 6.1.4:** „Každé číslo je cieľový bod, ak číslo a a n sú nesúdeliteľné. Uvažujme a a n súdeliteľné, potom existuje celé k, pre ktoré platí $k \cdot a = n$.

Dosadzujme za čísla x postupne po n. Dostávame cieľové body $a, 2a, 3a,$ neskôr prekročia $k.a$ budú $k - a + 2a$, ale $k(mod\ k.a)$ sú to znova iba čísla $a, 2a, 3a,...$ Čo je v spore s tým, že každé číslo po n je cieľový bod, čo nie je možné, lebo cieľové body sú iba násobky čísla a."

Žiaci vo svojich riešeniach prejavili rôznu úroveň svojich vedomostí a schopností. Písomné žiacke riešenia vybranej dôkazovej úlohy majú odlišnú formu a žiaci si zvolili odlišné stratégie. Dva tímy žiakov z vybraných ukážok riešení si zvolili ako stratégiu dôkaz sporom. V riešení 6.1.1 sa žiaci síce priamo odvolávajú na využitie dôkazu sporom, avšak negácia zadanej implikácie, nie je celkom jasne formulovaná. Žiaci uzatvárajú dôkaz len na základe ich domnienky a bez podložených platných záverov. Na rozdiel od nich, žiaci v tíme z riešenia 6.1.4 správne sformulovali predpoklad pre skonštruovanie dôkazu. Pri jeho vytváraní však žiaci nedefinovali niektoré premenné a vzťahy, ktoré v riešení udávajú. Ostatné dve ukážky reprezentujú riešenia, kde žiaci čiastočne formulovali svoje predtým zistené závery (riešenie 6.1.2) alebo len preformulovali problém tak, aby riešenie vyhovovalo zadaniu a javilo sa ako jeho korektne riešenie (riešenie 6.1.3).

Využitím systému rubrík a priradením dosiahnutej zodpovedajúcej úrovne každému riešeniu pre jednotlivé hodnotené atribúty (tabuľka 6.2), dosiahneme prehľadné porovnanie výslednej úrovne výkonov žiakov v riešení otvorených matematických problémov.

Tabuľka 6.2: Hodnotenie riešení vybraného problému zo základného zadania z problému 6.1

	MKomp	Písomný prejav žiakov			Kreativita			Spolu
		PP_O	PP_A	PP_J	KR_O	KR_S	KR_A	
Riešenie 6.1.1	1	4	3	2	3	3	2	18
Riešenie 6.1.2	2	3	2	2	2	2	1	14
Riešenie 6.1.3	1	2	1	1	1	1	1	8
Riešenie 6.1.4	4	5	5	4	3	4	4	29

Hadíkovo hniezdo

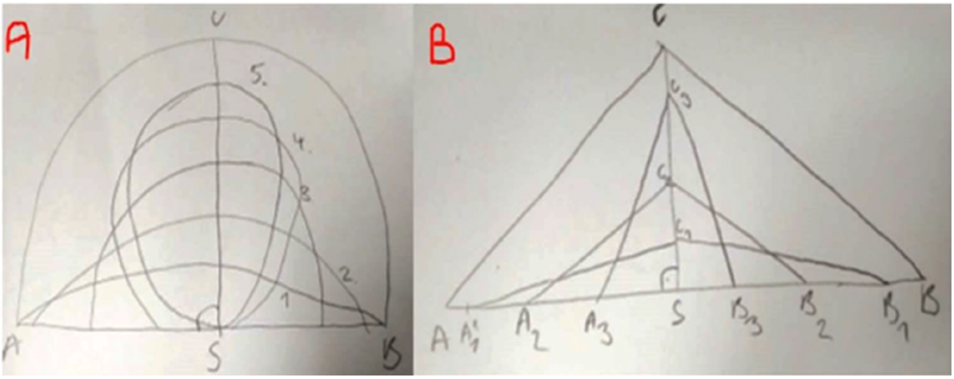
V druhej ukážke bude uvedené vybrané riešenie hlavného zadania ročníka súťaže Matematický B-deň 2018 s názvom „Hadíkovo hniezdo" (Matematický B-deň 2018: Hadíkovo hniezdo).

Problém 6.2: „... Navrhnite najmenšiu možnú prikrývku pre hada, ktorý má dĺžku 15 cm. ... Vyberte si typ hada a tvar prikrývky, ktorými sa budete ďalej zaoberať. Experimentujte. Opíšte stratégiu pozície pre všetky možné pozície hada. Nájdite príslušný minimálny obsah prikrývky. Vysvetlite, že všetky pozície hada je možné prikryť prikrývkou na základe stratégie pozície, ktorú ste opísali v C. Odstrihnite z prikrývky kúsky ale tak, že prikrývka bude stále vyhovovať podmienkam problému." (Matematický B-deň 2018: Hadíkovo hniezdo).

Celé zadanie o hľadaní najmenšej plochy pre 15 centimetrovú krivku bolo zostavené na základe kostry, ktorá tvorí aj hlavné zadanie daného ročníka. Žiaci od začiatku experimentovali s vybranými útvarmi: kruh, polkruh, obdĺžnik a iné štvoruholníky. V hlavnom zadaní boli žiaci vyzvaní, aby jednak vybrali plochu, ktorá je pre použitie prikrývky vhodná a využili všetky svoje zistenia, na ktoré prišli v základnom zadaní. Riešenie hlavného zadania by mal predstavovať žiakmi vytvorený matematický model, teda forma písomnej správy by mala byť komplexnejšia a obšírnejšia. Vytvorenie matematického modelu vyžaduje viac ako reprodukciu známych vzorcov a postupov (Tatsis & Maj, 2010). V rámci výchovno-vzdelávacieho procesu hovorí Weinhandl & Lavicza (2021) o tzv. reaktívnom matematickom modelovaní, čo znamená, že riešenie zadaného problému alebo situácie žiaci popisujú najmä pomocou pre nich známych matematických konceptov. Pre ukážku bola vybraná časť riešenia tak, aby nebola narušená autenticita riešenia žiakov, ani znížená dosiahnutá úroveň riešenia.

Riešenie 6.2.1: „Jedna úsečka v našom obale musí mať 15 cm (ostatné môžu byť kratšie). Uvažujeme teraz umiestnenie „ľahších" prípadov krivky (dajú sa ľahšie zistiť a ak to pre ne neplatí, nemá zmysel uvažovať daný prípad ďalej). Začali sme uvažovať nad polkruhom s polomerom7,5 cm. Ľahšie prípady tu krásne sedia (napríklad že krivku budeme ohýbať v strede). V tomto prípade to kružnica krásne „vykryje". Ďalej môžeme ešte uvažovať „skrútenú" krivku, ktorá má podobu kruhového výseku, ktorý má veľkosť 15 cm a jeho stred umiestnime na kolmicu. Pekne vidno, že pre uhol kruhového výseku väčší ako 180 stupňov (prípad 1 a 2), keď umiestnime dolné body na AB, tak to nemôže pretŕčať z nášho polkruhu. Ďalej pre prípad, že je uhol rovný 180, je to menší polkruh (podobný s väčším, prípad 3), teda tiež nemôže pretŕčať, no a pre uhly väčšie ako 180 a menšie ako 360 (prípad 4) ho tiež vieme vopchať dnu (funkcia polomeru od uhla kruhového výseku s 15 centimetrovou obvodom kruhového výseku). Nakoniec pre prípad, že je to celý kruh, dostaneme polomer okolo 2,4 cm a to tiež vyhovuje (obrázok 6.1 – A).

Obrázek 6.1: Žiacke riešenie 6.2.1 k ukážke problému 6.2



Pre ďalšie netriviálne prípady sme sa rozhodli rozdeliť krivku na polovice a jej stred sme umiestňovali na *CS* (obrázok 6.1 – B). Toto sme potvrdzovali len experimentálne (pre zložitosť výpočtov a nedostatok času) pre krivky, ktoré sa nepretínajú. Ďalej sme z tejto kružnice sme ukrojili dva kratšie oblúky tak, aby nám vznikol pravouhlý trojuholník s odvesnami 7,5 a 15 centimetrov, ktorý mal menší obsah. Tu nám experimenty tiež potvrdili, že útvar by mal fungovať, rovnako sme otestovali aj rovnoramenný pravouhlý trojuholník s výškou 7,5 centimetra a základňou 15 centimetrov. Pri rovnoramenných krivkách sme umiestňovali jej bod prieniku na výšku trojuholníka. Z trojuholníkovej nerovnosti ľahko vyplýva, že v tomto prípade bude celá rovnoramenná krivka vnútri trojuholníka. Ďalej sme skúšali kružnicové oblúky s dĺžkou 15 centimetrov ktoré tiež vyhovovali a reprezentovali sme ich ako funkciu polomeru výseku od uhla kruhového výseku s 15 centimetrovou dĺžkou oblúka a zopár náhodných kriviek. Na výšku sme jednoducho položili stred krivky a experimentálne sa nám to tiež potvrdilo.“

V riešení je vidieť, že žiaci sa odvolávajú na predtým získané výsledky z riešení problémov v základnom zadaní. Na začiatku si stanovili, aké vzdialenosti je potrebné v danom útvare zaručiť (napríklad 15 cm dlhú úsečku pre „vystretú polohu hada“). Následne si stanovili hlavný princíp, na základe ktorého budú krivku do útvaru vkladať, a teda stred krivky bude ležať na osi súmernosti vybraného útvaru. Hlavnou metódou, na ktorú sa žiaci vo svojom riešení najviac odvolávali, bolo experimentovanie, aj keď v riešení hlavného zadania využili mnoho poznatkov, ku ktorým sa dopracovali počas riešenia základného zadania. K riešeniu hlavného zadania žiaci priložili viacero obrázkov, ktoré sú načrtnuté len vlastnou rukou.

Výsledný záver riešenia hlavného zadania nie je jednoznačný. Žiaci síce opisujú niekoľko možných riešení, avšak pri dodržiavaní odporúčanej kostry, končia pri experimentovaní. Ďalej už neskúmajú, či zadaný útvar má skutočne najmenší možný obsah. Na hodnotenie riešenia hlavného zadania bol opäť aplikovaný vytvorený systém rubrík pre hodnotenie zvolených atribútov (tabuľka 6.4):

Tabuľka 6.4: Hodnotenie riešenia hlavného zadania (problém 6.2)

	HZ_IBL	Písomný prejav žiakov			Kreativita			Spolu
		PP_O	PP_A	PP_J	KR_O	KR_S	KR_A	
Riešenie 6.2.1	3	4	4	4	3	4	4	30

Rubrika svojou podstatou predstavuje hodnotiaci nástroj, v ktorom možno popísať na rôznych úrovniach výkon žiakov. Ako už bolo spomínané, okrem hodnotiacej funkcie plní aj informatívnu funkciu o žiakovom výkone, nielen pre učiteľa, ale aj pre žiaka samotného. Poskytuje tak možnosť vidieť štýl premýšľania žiakov, schopnosť spracovať informácie a pozorovať nedostatky.

Ukážka: „Pri písaní záverečnej správy ste využili správnu matematickú argumentáciu a svoje tvrdenia ste podložili postačujúcimi dôkazmi. Záverečná správa má súvislú a jednotnú štruktúru a tvorí jeden celok, aj napriek tomu, že riešenia úloh sú rozdelené do kapitol. Celistvosť môže narúšať neúplnosť riešení a nezainteresovaný čitateľ by tak nemusel porozumieť podstate problému. Napriek tomu, vaše riešenie je originálne a matematicky hodnotné. Pre komplexnosť riešenia by bolo potrebné vaše myšlienky viac rozvinúť a popísať.“

Využitie rubrík predstavuje jednoduchý a rýchly nástroj pre vytvorenie spätnej väzby, ktorá v širšom slova zmysle tiež slúži pre podchytenie úspechu, ale aj pre poučenie sa z chýb (Reitmayerová & Broumová, 2007). Zo slovných popisov výkonu žiakov, ktoré sú formulované v rubrikách, bola vytvorená spätná väzba pre zúčastnených riešiteľov súťaže.

6.2 Aplikácia rubrík pre hodnotenie písomných riešení študentov pre primárne vzdelávanie

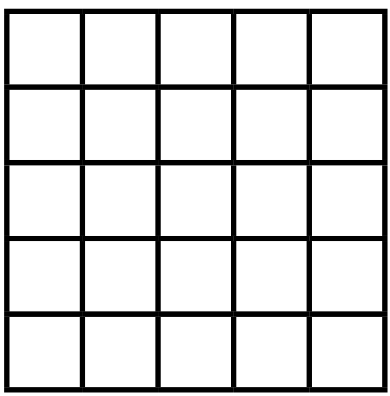
Rubriky boli aplikované aj pre hodnotenie písomných riešení študentov učiteľstva pre primárny stupeň. V rámci prípravy pre budúce povolanie učiteľa, boli študenti vyzvaní pracovať na riešení matematických problémov s rôznou mierou otvorenosti. Taktiež boli študenti upozornení na to, že riešenie problémov má mať charakter písomnej správy, teda aby popísali jednotlivé kroky svojho riešenia.

Ako ukážka pre aplikáciu rubrík ako hodnotiaceho nástroja boli vybrané riešenia študentov študijného programu Učiteľstva pre 1. stupeň základných škôl. Výskumu sa zúčastnili študenti na univerzitách v Českej republika aj v Slovenskej republike. Pre príbuznosť oboch boli ponechané opäť pôvodné riešenia študentov tak, aby sa pri preklade nezmenil význam písomného riešenia. Študenti riešeili dva z problémov Matematickej olympiády pre žiakov 5. ročníka základnej školy.

Farebný štvorec

Problém 6.3: „Na obrázku (6.2) je štvorec rozdelený na 25 štvorčekov. Vyfarbite štvorčeky piatimi farbami tak, aby platilo: Každý malý štvorček je vyfarbený jednou farbou, v žiadnom riadku ani žiadnom stĺpci nie sú dva štvorčeky rovnakej farby a žiadne dva rovnako farebné štvorčeky sa nedotýkajú stranou ani vrcholom.“ (Matematická olympiáda, 2014, s. 1).

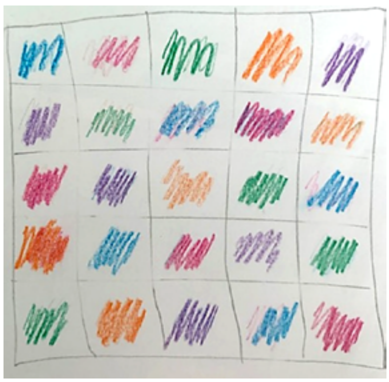
Obrázok 6.2: Obrázok k zadaniu problému Farebný štvorec



Problém „Farebný štvorec“ pripomína matematickú hádanku latinských štvorcov, avšak s uvedenou podmienkou naviac, a to že sa štvorce nesmú dotýkať ani diagonálne. Problém má kombinatorickú povahu a z hľadiska kategorizácie problémov podľa otvorenosti sa jedná o problém s otvorenou cestou (napr. štýl systematizácie pri vyfarbovaní jednotlivých štvorčekov) a otvoreným cieľom (problém má viac riešení). Ukážky riešení študentov boli vybrané tak, aby pokrývali rôzne postupy študentov, ako aj priblížili rôznu mieru ich písomného prejavu.

> **Riešenie 6.3.1:** Připravila jsem si 5 barev (modrá, červená, zelená, oranžová, fialová) a podle zadání jsem si vybarvila každý čtverec jinou barvou, ale musela jsem si dávat pozor, aby v řádku a ani ve sloupci nebyly 2 čtverečky stejné barvy. Začala jsem prvním řádkem a prvním sloupcem. Postupně jsem střídala barvy, aby splnila první 2 body. Vybarvila jsem každý čtvereček v celém čtverci. V obou dvou úhlopříčkách mám vždy jen jeden čtvereček stejný a nakonec na každé straně a vrcholu se mi vždy dotýká čtverec s jinou barvou (obrázok 6.3).

Obrázok 6.3: Študentské riešenie 6.3.1 problému Farebný štvorec



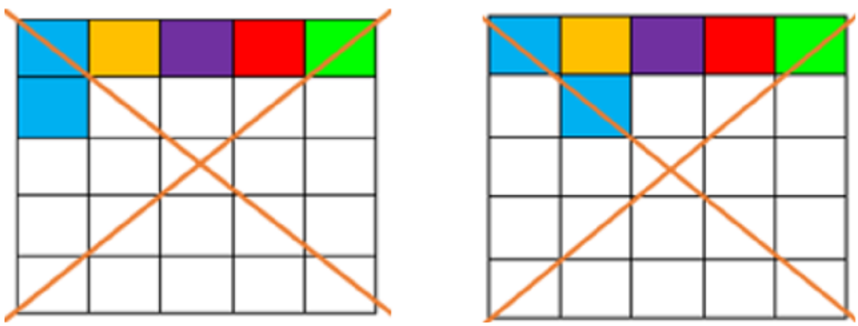
Na úvodnej ukážke môžeme pozorovať najčastejší problém toho, akým spôsobom študenti podávajú svoje písomné riešenie. V riešení 6.3.1 nie je popísaný postup, akým spôsobom jednotlivé štvorčeky vyfarbiť, ale technika spracovania. V riešení chýba popísanie systematickosti a teda popísaný algoritmus, ktorým sa študentka k výslednému riešeniu dostal. Týmto sa vytráca matematický podtext a nemožno teda pozorovať matematické kompetencie, ani smer matematického myslenia.

Riešenie 6.3.2: „1. krok: Nakreslím si velký čtverec, který bude mít 25 malých čtverečků. V prvním řádku vymaluji čtverečky, tak, aby měl každý jinou barvu. Každý čtvereček v prvním řádku se barevně liší (obrázok 6.4).

Obrázok 6.4: Postup študentského riešenia 6.3.2 problému Farebný štvorec

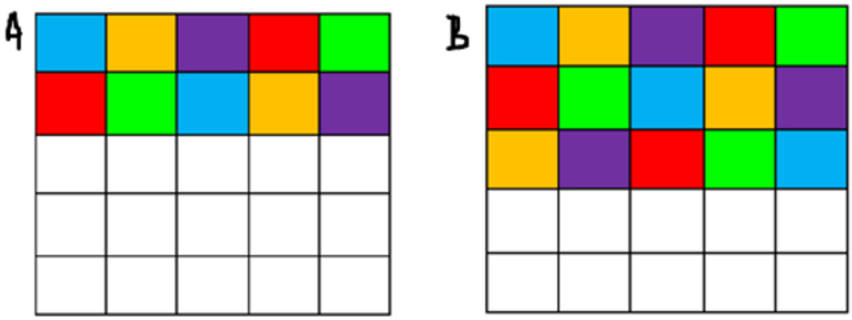
2. krok: Nyní se dostáváme k druhé řadě. Našim úkolem je, aby se žádná z barev neopakovala, jak ve sloupci, řádku, tak ani v uhlopříčce. Podmínkou je také, že se daný čtvereček nesmí dotýkat vrcholem čtverečku stejné barvy v dalším řádku.
3. krok: Nesmí dojít k těmto variantám! Pokud bych v druhém řádku dala modrý čtvereček na první místo, byla by modrá 2x v jednom sloupci, což v podmínkách je zakázáno.
4. krok: Pokud bychom dali modrý čtvereček na pozici dva. Nesplňovalo by to opět zadání, protože modrá by se opět dotýkala modrého vrcholu a zároveň byly dva modré čtverečky v úhlopříčce, což také být nemůže. Tato varianta je také nevhodná (obrázok 6.5).

Obrázok 6.5: Postup študentského riešenia 6.3.2 problému Farebný štvorec



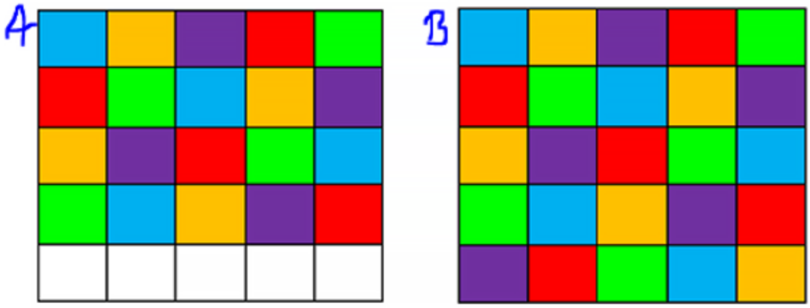
5. krok: Zkusím tedy čtvereček posunout na pozici číslo 3 (obrázok 6.6 – A). Tady se nám nepotkávají dvě stejné barvy ani v úhlopříčce, ani v řádku, a nejsou spojeny ani vrcholy. Tato varianta je vhodná. Doplním tedy barvy tak, jak jsou za sebou v prvním řádku, jenom o dvě místa posunuté.
6. krok: Nyní splňujeme veškerá stanovená pravidla. Ve třetím řádku modrou kostičku posuneme opět o dva čtverečky dál oproti řádku druhému (obrázok 6.6 – B). Pokud bychom modrou kostičku posunuli jenom o jednu pozici, dotýkaly by se modré barvy opět u vrcholů. Posuneme ji tedy od dvě pozice směrem doprava. Tak samo posuneme i ostatní barvy v řádku.

Obrázek 6.6: Postup študentského riešenia 6.3.2 problému Farebný štvorec



7. krok: Ve čtvrtém řádku posunem modrou kostičku opět o dvě pozice dál, než je modrá kostička ve třetím řádku. Opět jsme dodrželi veškerá pravidla a žádná z barev se nám nikde nedotýká (obrázok 6.7 – A).
8. krok: Nyní se dostáváme k poslednímu kroku naší práce. Modrou kostičku posuneme o dvě pozice směrem doprava. Ostatní barvy se posunou také. Pořadí barev nijak neměníme.

Obrázok 6.7: Postup študentského riešenia 6.3.2 problému Farebný štvorec



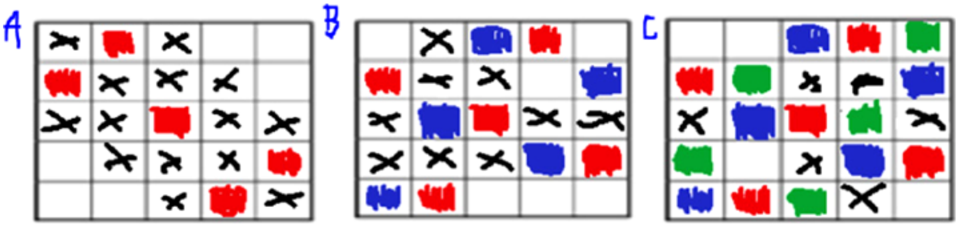
> 9. krok: Vznikne nám tedy vymalovaný čtverec s 25 čtverečky (obrázok 6.7 – B).
> Kdy jsme splnili veškerá pravidla:
> Čtverečky stejné barvy se nedotýkají ve svých vrcholech, ani po stranách.
> V uhlopříčce se nevyskytuje čtvereček stejné barvy.
> V žádném řádku, ani sloupci, není jedna barva čtverečku vícekrát.

Oproti predchádzajúcej ukážke, uvedené študentské riešenie je obšírnejšie, podrobnejšie a formulované tak, že aj nezainteresovaný čitateľ by vedel identifikovať zadanie riešeného problému. Okrem jasného popisu jednotlivých krokov obsahuje riešenie 6.3.2 vytváranie istého systému v riešení, aj keď v popise je vysvetlený stroho. Bez dodaných obrázkov by bolo náročné pochopiť vyjadrenia ako napríklad „posunutie na pozíciu". V písomnom riešení možno pozorovať dodržiavanie jednotnej argumentácie, ktorá korešponduje so zadaním, aj keď sa opäť jej matematická podstata stráca. Študentské riešenie nepredstavuje možný nástroj pre riešenie problému.

> **Riešenie 6.3.3:** Tento příklad mě zaujal z toho důvodu, protože si myslím, že se bude řešit podobně, jako když máme například vyřešit sudoku. Rozdíl bude akorát v tom, že já budu doplňovat barvy, a ne čísla. ... máme 25 čtverečků a 5 barev, z čehož vyplývá, že stejnou barvou bude vybarveno 5 čtverečků. Začala jsem čtverečkem uprostřed a vyznačila jsem ho červenou barvou. Poté jsem si udělala křížek u těch čtverečků, které nemohou mít také červenou barvu, protože se například dotýkají vrcholem, jsou ve stejném řádku nebo spolu sousedí. Nesmíme také zapomínat na úhlopříčky (obrázok 6.8 – A)!
> Poté jsem zvolila barvu modrou a postupovala velmi podobně jako předtím s barvou červenou. Začala jsem z levé strany od prostředního červeného čtverečku a dále vybarvovala (obrázok 6.8 – B).

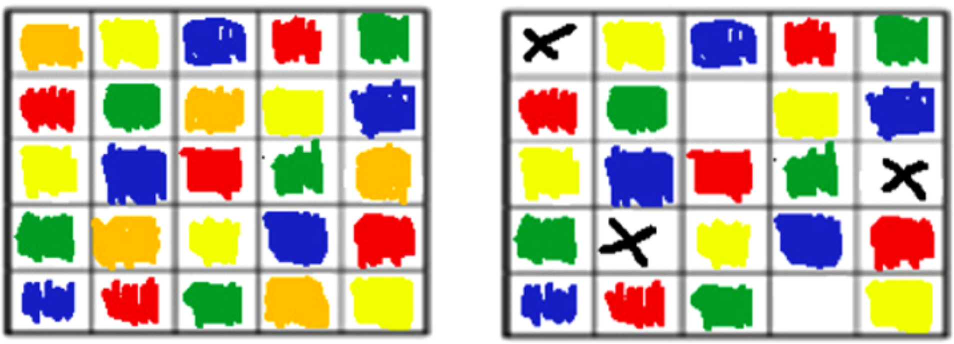
Dále jsem zvolila barvu zelenou, se kterou jsem začala podobně jako s modrou a dodržovala stále ty stejná pravidla: žádné úhlopříčky, žádné řádky, žádné vrcholy, žádné strany (obrázok 6.8 – C)!

Obrázok 6.8: Postup študentského riešenia 6.3.3 problému Farebný štvorec



Máme před sebou dvě poslední barvy: žlutou a oranžovou. Už zbývá pouze 10 políček, které můžeme nějakým způsobem vybarvit. A jakým způsobem? Pořád tím samým...uděláme křížky tam, kde barva být nemůže, protože dané políčko nesplňuje pravidla a umístíme barvu na vhodné místo. A políčka pro barvu oranžovou jsou již jasné a máme hotovo! Všechna políčka mají svou barvu a všechna splňují pravidla, kterými jsme se měli řídit (obrázok 6.9)!

Obrázok 6.9: Postup študentského riešenia 6.3.3 problému Farebný štvorec

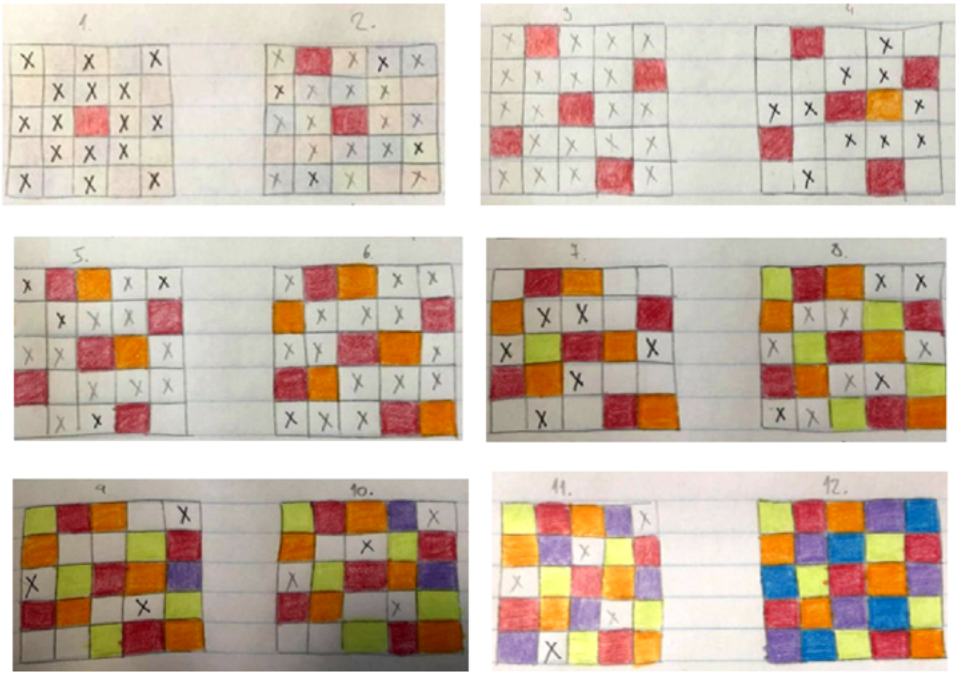


Riešenie 6.3.3 už ukazuje istú mieru systematickosti v postupe riešenia, ktorú študentka aj primerane vysvetľuje. Avšak v riešení sa nachádza niekoľko prvkov, ktoré narušujú úroveň písomného riešenia ako celku. Hneď nesprávna interpretácia sa nachádza pri použití a popísaní obrázku 6.8 – A. Študentka použila pravdepodobne nesprávny obrázok z predchádzajúcich pokusov. A tu práve sa dostávame k nedostatočnému slovnému postupu riešenia. Pri udávaní políčok, ktoré vyfarbíme danou farbou chýba zdôvodnenie nevyhovujúcich

riešení. Následne od obrázka 6.8 – B sú polia v štvorci uvedené správne. Avšak aj takáto nedbanlivosť už narúša písomný prejav, a teda obsah a jasnosť textu riešenia.

Riešenie 6.3.4: Pokoušela jsem se na to přijít, že jen tak si do čtverečků nakreslím barvy, ale takhle mi to vůbec nevycházelo, poté jsem se nad tím zamyslela a přišla jsem na to, že první musím začít jednou barvou a postupně přidávat barvy. Jako první jsem začala s červenou barvou, kterou jsem dala doprostřed čtverce. Poté jsem si označila místa, kde další barva nemůže být a dala jsem tam křížky (místa jsem vykřížkovala podle toho, co bylo v zadání, barvy se nesmí dotýkat, nesmí být vedle sebe, v řádku ani ve sloupci nesmí být dvě stejné barvy a také, že na žádné z dvou úhlopříček nesmí být stejná barva). Poté jsem přešla na první řádek a tam jsem si vybrala ze dvou volných míst. Když jsem si vybrala, kde červenou barvu dám, tak jsem zase musela udělat křížky, kde další červená nemůže už být, místa jsem vykřížkovala a šla jsem na druhý řádek. Na druhém řádku bylo jedno volné místo, tak bylo jasné kde červená barva bude. Poté už zbývaly další dvě červené barvy a ty už měly svoje určené volné místo. Jako další barvu jsem si zvolila oranžovou, tu jsem dala vedle červené a zase jsem si vyznačila křížkama, kde už oranžová nemůže být. A dále jsem postupovala stejně jako u červené a takhle to šlo pořád dokola s dalšími barvami. Postup i na obrázku (6.10).

Obrázok 6.10: Postup študentského riešenia 6.3.4 problému Farebný štvorec



V riešení 6.3.4 je uvedená ukážka s rovnakou stratégiou riešenia ako v ukážke riešenia 3 problému Farebný štvorec. Avšak, ukazuje sa úroveň hlbšieho premýšľania o probléme, kde v úvode riešenia študent vysvetľuje výber svojej riešiteľskej stratégie (aj keď sa jedná len o prechod od metódy „pokus–omyl“ k „vylúčeniu nevyhovujúcich možností“). Študent vo svojom riešení konkrétne opisuje výber vyfarbených polí. Čo však na druhú stranu chýba danému písomnému riešeniu, je spôsob uzatvorenia písomnej správy.

> **Riešenie 6.3.5:** Na papír jsme si nakreslili 25 čtverečků po 5 řadách. Místo barev jsme používali čísla, aby to bylo pro následné řešení jednodušší.
> Nejdřív jsme si tedy první řadu vyplnili čísli od 1–5. Druhou řadu jsme vyplnili tak, aby platili pravidla, které byli uvedeny v zadání příkladu. A to tak, že číslo 1 musí začínat vždy o dva čtverečky vpravo, než začínalo v předchozí řadě. Stejným způsobem jsme tak postupovali v dalších řadách.
> Toto je tedy ukázka (obrázok 6.11), jak jsme číslo 1, v druhé řadě, posunuli o dva čtverečky doprava. (tedy z 1. čtverečku, které bylo v první řadě, na 3. čtvereček ve druhé řadě).

Obrázok 6.11: Postup študentského riešenia 6.3.5 problému Farebný štvorec

1	2	3	4	5
4	5	→ 1	2	3

Další 3. řada (obrázok 6.12) bude na stejný princip vyplněná. Posuneme tedy číslo 1 o dvě políčka doprava, než začínalo v přechozí 2. řadě. (ze 3. čtverečku, které bylo ve druhé řadě, číslo 1 posuneme na 5. čtvereček ve třetí řadě).

Obrázok 6.12: Postup študentského riešenia 6.3.5 problému Farebný štvorec

1	2	3	4	5
4	5	→1	2	3
2	3	4	5	→1

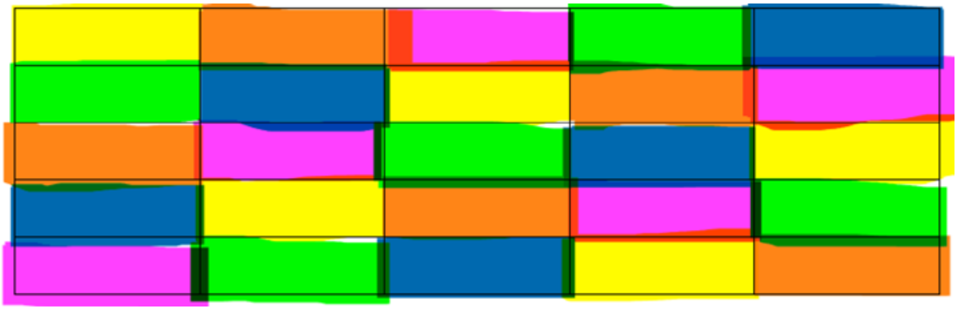
Stejným principem budeme postupovat v celé tabulce a vyjde nám celá tabulka takto (obrázok 6.13):

Obrázok 6.13: Postup študentského riešenia 6.3.5 problému Farebný štvorec

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

Takto nám tedy vyjde tabulka, která dodržuje pravidla, která jsou uvedená v zadání příkladu. Pokud bychom místo číslic, použili barvičky, tak to bude vypadat následovně (obrázok 6.14):

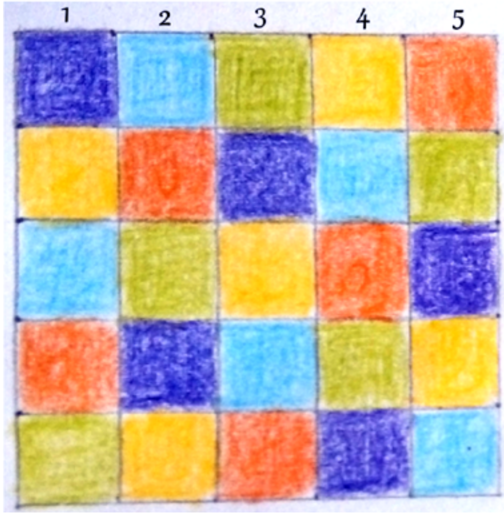
Obrázok 6.14: Postup študentského riešenia 6.3.5 problému Farebný štvorec



Študentské riešenie 6.3.5 je založené opäť na úprave jednotlivých radov, aby boli splnené základné stanovené podmienky. Študentka však využila priradenie číslic k jednotlivým farbám, aj keď princíp priraďovania explicitne nepopisuje. Číselné rady postupne ukazujú, že študentka pracovala systematicky a vedome používala posunutie priamo menovaných pozícií, čo už ukazuje náznak nejakej základnej terminológie. Písomný prejav je však strohý a miestami nie jasný. Písomné riešenie z pohľadu originálnosti a aplikovateľnosti by sa po hlbšom zovšeobecnení a pokuse zavedenia premennej mohol stať nástrojom aspoň pre riešenie príbuzného problému.

Riešenie 6.3.6: Začala som fialovou farbou. Ňou som vyfarbila úplne prvé políčko v celom štvorci. Pre splnenie podmienky rozdielnych políčok v jednom riadku som pokračovala do riadku nižšie. Aby sa dve políčka rovnakej farby nevyskytovali ani v jednom totožnom stĺpci, a aby sa rovnako farebné políčka nedotýkali stranou ani vrcholom, vyfarbila som políčko v stĺpci č. 3. Opäť som postupovala o riadok nižšie a vyfarbila políčko v ďalšom nepárnom stĺpci, teda č. 5. V nižších riadkoch som doplnila už len políčka v stĺpcoch s párnym číslom. Následne som používala modrú farbu. Vyfarbovala som políčka hneď napravo od fialových políčok, čo zabezpečilo, že sa opäť pozície modrých políčok prestriedali, v každom riadku aj stĺpci bolo len jedno modré políčko a navzájom sa nedotýkali.
Rovnako som postupovala aj pri ostatných farbách. Teda vždy som políčka s novou farbou umiestňovala hneď napravo od predošlej farby (obrázok 6.15).

Obrázok 6.15: Postup študentského riešenia 6.3.6 problému Farebný štvorec

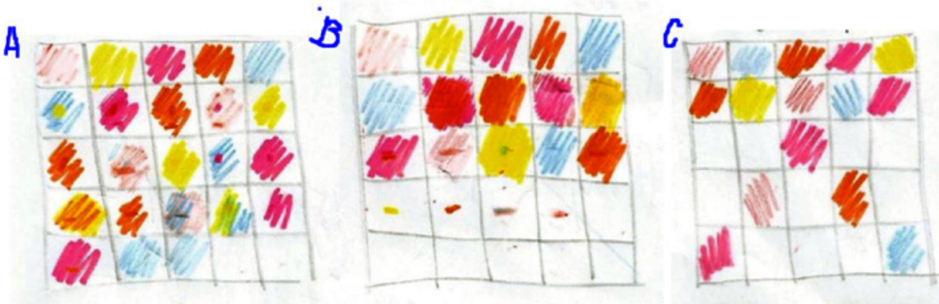


Uvedené študentské riešenie je opäť zamerané na posunutie. Slovný popis a písomný prejav je stručný, ale jasný, označenie stĺpcov na obrázku uľahčuje zorientovanie sa pri vzniknutých nejasnostiach pri čítaní riešenia. Študentka využíva matematickú argumentáciu, čo riešeniu ponecháva matematický charakter. Všetky spomenuté skutočnosti robia celkové riešenie korektným, avšak poskytuje riešenie len daného konkrétneho problému.

Riešenie 6.3.7: Tady u tohoto úkolu jsem si z počátku vůbec nevěděla rady. Mým prvním krokem, který jsem udělala bylo, že jsem si vybrala pět různých barev a na papír jsem si nakreslila čtverec rozdělený na 25 čtverečků.

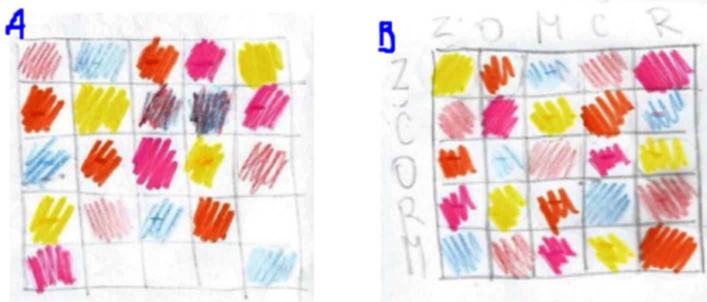
1. Můj první krok řešení mého úkolu. Začala jsem barvit nejdříve čtverečky odshora dolů postupně po řadách. Jak si můžete všimnout u posledních dvou řad mi nevycházely barvy (obrázok 6.16 – A).
2. Druhý čtverec (obrázok 6.16 – B), úplně stejný postup, jako u prvního, jen jsem zkoušela pozměnit některé barvy, ale pořád mi nevycházely uhlopříčky, jak bylo dáno v zadání.
3. Jak můžete vidět u třetího kroku (obrázok 6.16 – C) jsem trošku pozměnila můj postup a to tak, že jsem začala vybarvovat čtverec od uhlopříčky, která mi nikdy před tím nevycházela. Ale i tak jsem se pořád nemohla a nedokázala dobrat závěru. A pořád jsem nevěděla, co dělám špatně.

Obrázok 6.16: Postup študentského riešenia 6.3.7 problému Farebný štvorec



4. Nakonec jsem ale došla správného závěru. Začala jsem tedy uhlopříčkou, jak v předchozích krocích a vždycky jsem se zaměřovala na to, jak jsem šla postupně dolů (obrázok 6.17 – A), jakou barvu nemůžu, ve kterém čtverci nebo sloupci použít. Tak se mi podařilo tento příklad rozlouskat (obrázok 6.17 – B)."

Obrázok 6.17: Postup študentského riešenia 6.3.7 problému Farebný štvorec



Jednotlivé kroky písomného riešenia sú popísané veľmi jasne, takže každému čitateľovi je jasná podstata problému. Podobne ako v prípade riešenia 6.1.4, študentka začína s využitím riešiteľskej stratégie „pokus–omyl", ktorá bola nakoniec ponechaná ako kľúčová pre vyriešenie problému. Skoro v každom z popísaných krokov riešenia študentka pri nesprávnom postupe uvádza, že nevie prísť na to, kde urobí chybu. Pri závere však neobjasňuje na základe čoho dospela k správnemu riešeniu. Celkový dojem z uvedeného záveru je, že k správnemu riešeniu študentka dospela náhodou. Nejaká ďalšia aplikácia postupu nie je možná ani na rovnaký druh problému.

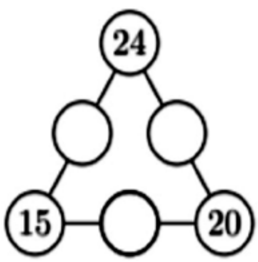
Tabuľka 6.5: Hodnotenie študentských riešení problému Farebný štvorec (problém 6.3)

	MKomp	Písomný prejav žiakov			Kreativita			Spolu
		PP_O	PP_A	PP_J	KR_O	KR_S	KR_A	
Riešenie 6.3.1	1	2	1	2	1	2	1	10
Riešenie 6.3.2	2	3	2	3	2	3	2	17
Riešenie 6.3.3	2	1	2	3	2	1	2	13
Riešenie 6.3.4	2	4	2	3	2	4	3	19
Riešenie 6.3.5	2	2	3	2	3	3	3	18
Riešenie 6.3.6	2	3	3	3	2	4	2	19
Riešenie 6.3.7	1	2	1	3	2	2	1	12

Pri hodnotení študentských riešení daného problému neboli identifikované znaky vyššej úrovne matematických kompetencií, písomného prejavu alebo miery kreativity (tabuľka 6.5). Je potrebné vziať do úvahy, že aj keď sa jedná o matematickom probléme s otvorenou cestou a otvoreným cieľom, mohol študentom uniknúť matematický kontext úlohy. Problém má formu hlavolamu a aj v uvedených riešeniach sa tento prístup odzrkadľuje.

Reťazovka

Problém 6.4: Doplňte do prázdnych krúžkov na obrázku prirodzené čísla tak, aby súčet čísel na každej strane trojuholníka bol rovnaký a aby súčet všetkých šiestich čísel bol 100 (Slovenská komisia matematickej olympiády, 2013, s. 2).



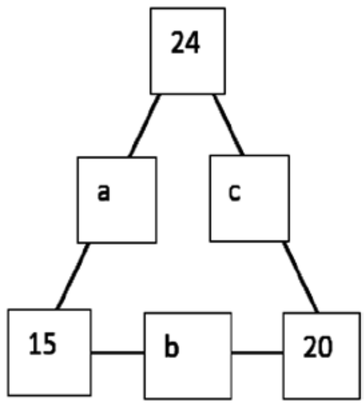
Riešenie 6.4.1: „Najmenšie číslo, ktoré máme doplniť na strane s číslami 24 a 20, lebo zo známych čísel dávajú práve tieto dve najväčší súčet. Skúsme do prázdneho okienka na tejto strane doplniť najmenšie možné prirodzené číslo, teda 1. V takom prípade by súčet na strane trojuholníka bol $24 + 1 = 45$. Do zvyšných prázdnych okienok by patrili čísla $45 - 15 - 20 = 10$ a $45 - 15 - 24 = 6$.

Súčet všetkých šiestich čísel by v tomto prípade bol $24 + 1 + 20 + 10 + 15 + 6 = 76$, čo je o 24 menej ako požadovaných 100. Každé z doplnených čísel preto musí zväčšiť o $24 : 3 = 8$ prázdnych okienok patria čísla $1 + 8 = 9, 10 + 8 = 18$ a $6 + 8 = 14$."

Študentka si zvolila postup uvedenia výsledkov deduktívnym spôsobom, kde si zvolila použiť najmenšie možné dostupné číslo. Takýto postup sa nazýva aj metódou nesprávneho predpokladu. Správnym spôsobom uviedla, že to bude pri dvojici čísel, ktorá dáva najväčší súčet. V písomnom riešení sa však vyskytuje chyba, zrejme z nepozornosti, kedy pri výpočte súčtu chýba jeden člen $24 + 1 + 20 = 45$. Táto chyba však výrazne nezasahuje do celkového pochopenia riešenia problému. Logickou úvahou od zadanej podmienky došla študentka k základnému vyjadreniu pomeru chýbajúcich číslic. Takto formulovaný záver pri rozšírení pomeru číslic chýba, čo ovplyvňuje aj matematický charakter riešenia.

Riešenie 6.4.2: „Ze všeho nejdřív si označím prázdná políčka písmeny: *a, b, c,* aby v tom nebyl chaos (obrázok 6.18).

Obrázok 6.18: Postup študentského riešenia 6.4.2 problému Reťazovka.



Jestliže víme, že součet všech šesti čísel je 100, můžeme si napsat následující vzorec: $a + b + c + 15 + 20 + 24 = 100$

Na jedné straně jsou písmena i čísla a na druhé je číslo 100, takže si k číslu 100 převedeme ostatní čísla, a to 15, 20 a 24. Musíme si dát pozor, že když převádíme čísla přes rovná se, tak musíme změnit jejich znaménko. Takže z plusu se stane mínus a následně vše odečteme.

$a + b + c = 100 - 15 - 20 - 24$

$\boldsymbol{a + b + c = 41}$

Teď už víme, že součet $a + b + c$ bude 41. Dalším krokem je si uvědomit, že součet tří čísel na každé ze stran trojúhelníku je stejný. Můžeme to dát do následujícího vztahu:

$\boldsymbol{24 + a + 15 = 24 + c + 20 = 20 + b + 15}$.

Hned využijeme tento vztah, vždy si vezmeme dvě strany a dáme je do poměru a čísla opět přesuneme na jednu stranu a písmena na druhou:

(1) $24 + a + 15 = 24 + c + 20, a - c = 24 + 20 - 24 - 15, \boldsymbol{a - c = 5}$

(2) $20 + b + 15 = 24 + c + 20, b - c = 24 + 20 - 15 - 20, \boldsymbol{b - c = 9}$

(3) $20 + b + 15 = 24 + a + 15, b - a = 24 + 15 - 15 - 20, \boldsymbol{b - a = 4}$

Když jsme si udělaly výše zmíněné zelené vzorce, tak můžeme využít náš nejstarší vzorec, kterým je $a + b + c = 41$ a uplatníme na něm postupně zelené vzorce.

Nejdříve si vezmeme vzorcem s $b - a$ a to z prostého důvodu, že se lehce zbavíme písmene a. Poté pomocí sčítání rovnic, vypočítáme jednu rovnici. Teda:

$a - a, b + b, c, 41 + 4,$

$a + b + c = 41, \ b - a = 4, \boldsymbol{2b + c = 4}$.

K tomuto oranžovému vzorci doplníme jeden ze zelených vzorců tak, aby nám zmizelo písmeno c. Což znamená, že využijeme vzorec $b - c$. Následně zase rovnice sečteme.

$2b + c = 45, b - c = 9, 3b = 54$

Kvůli tomu, že nám vyšly *3b*, tak 54 vydělíme 3 a tak nám vyjde kolik je b.

$3b = 54, 54 : 3 = 18, \boldsymbol{b = 18}$

Teď už nám vyšlo jedno z čísel, které počítáme. Dosadíme si ho do původní rovnice a opět dáme písmena na jednu stranu a čísla na druhou.

$a + 18 + c = 41, a + c = 41 - 18, a + c = 23$

Tento vzorec opět doplníme jedním ze zelených, aby zmizelo písmeno c. Takže použijeme vzorec $a - c$.

$a + c = 23, a - c = 5, 2a = 28, \boldsymbol{a = 14}$

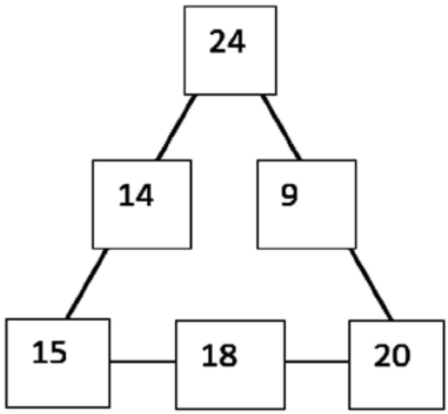
Teď záleží na vás, který z vzorečků si vyberete, abyste vypočítali písmeno c. Já využiju první vzorec.

$a + b + c = 41, 14 + 18 + c = 41, \boldsymbol{c = 9}$

Teď už máme všechny čísla vypočítané. Můžeme provést zkoušku, jestli jsou všechny strany stejně dlouhé z vzorce číslo dva. Místo písmen si můžeme dát rovnou čísla.

$24 + 14 + 15 = 24 + 9 + 20 = 20 + 18 + 15, 53 = 53 = 53$

Obrázek 6.19: Postup študentského riešenia 6.4.2 problému Reťazovka.



Teď můžeme s jistotou říci, že do vyplněných prostor patří čísla 14 (na místo *a*), 18 (na místo *b*) a 9 (na místo *c*)."

Riešenie 6.4.2 je obšírnejšie ako predchádzajúca ukážka riešenia, ponúka podrobný algebrický postup pre nájdenie hľadaných číslic. Počiatočné zostavenie rovníc je vysvetlené jasne a podrobne, až po rovnice označené (1), (2) a (3) vrátane. Následne, pri dosadzovaní premenných, je už spôsob zisťovania výsledku nejasný, najmä pri odvodzovaní hodnôt jednotlivých premenných vynechala študentka niektoré kroky ekvivalentných úprav. Kvôli týmto chýbajúcim krokom sa riešenie nejaví ako nástroj pre riešenie podobných problémov. Argumentácia nie je jednotná. Občas sa v texte nachádza označenie „vzorce" a inokedy „rovnice". Nakoniec, na záver riešenia nie je skontrolovaný súčet všetkých číslic, len rovnosť súčtu číslic na stranách trojuholníka.

Riešenie 6.4.3: „... z obrázků víme že máme čísla 24, 15 a 24. Rozdělíme si tedy strany, abychom mohli hledat stejný součet, avšak musíme myslet na druhou část příkladu. A to že součet všech čísel se má rovnat 100. Součet strany *a. b.* i *c.* musí být stejný.

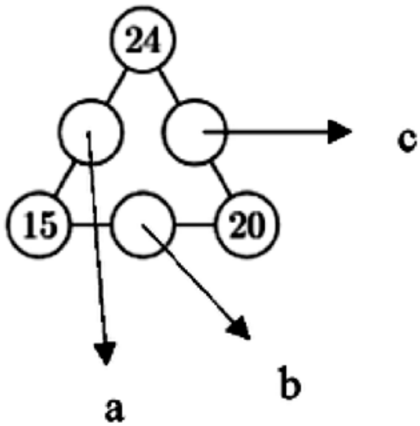
1. Nejprve zjistíme, kolik nám chybí z celého čísla 100, pokud odečteme 3 již zjištěné čísla: $(100 - (24 + 15 + 20)) = 41$
2. Číslo 41 nám udává s čím můžeme pracovat dále (co můžeme rozdělit mezi 3 části)
3. Nyní si vezmeme strany trojúhelníku $a.(15+?+24)$, $b.(15+?+20)$ a $c.(20+?+24)$, které sečteme každou zvlášť.
4. Získáme výsledky $a.(39)$, $b.(35)$, $c.(44)$.
5. Nyní ke každé straně přičteme čísla tak, aby se každá strana rovnala 50. (číslo dorovnáme proto, abychom měli pracovní výsledek a eliminovali tak zbytečné rozpočítávání čísel.)
6. Ke straně a přičteme 11, ke straně $b. -15$, $c. -6$ (tyto čísla nám nyní reprezentují chybějící čísla).
7. Tyto čísla jsme si brali z již vypočítaného čísla (41), takže je odečteme.
8. Po odečtení zjistíme že nám zbylo číslo 99.
9. Toto číslo vydělíme třema, tak abychom ho mohly rovnocenně rozdělit do 3 chybějících čísel: $(9/3 = 3)$.
10. Jako poslední krok si tedy vezmeme čísla z 6-tého kroku a přičteme k nim číslo 3 z předešlého výpočtu.
11. Výsledkem tedy budou čísla (14, 8, 9).

Pro kontrolu, jestli jsme splnili obě části příkladu si sečteme všechny čísla, ale také každou stranu zvlášť. $a.(24 + 14 + 15) = 53$, $b.(15 + 18 + 20) = 53$, $c.(20 + 9 + 24) = 53$ toto nám potvrdilo první podmínku a to že součet každé strany se rovná.
Nyní si ověříme zda se součet všech čísel rovná 100.
$(24 + 14 + 15 + 18 + 20 + 9) = 100$. Po ověření můžeme říct, že do bublin musíme doplnit čísla 14, 18 a 9."

Študentka v riešení 6.4.3 použila rovnakú stratégiu, ako v predchádzajúcej ukážke riešenia, stanovením premenných pre jednotlivé strany trojuholníka. Celý postup riešenia však nemá len algebrický charakter. Síce sú jednotlivé odseky rozdelené do krokov, ale logicky na seba nadväzujú. Počas celého riešenia je dodržaná matematická argumentácia ako aj matematická správnosť. V riešení sa vyskytujú však nejasnosti, najmä v kroku 6. Tu študentka vyrovnáva súčet čísel na stranách trojuholníka na hodnotu 50. Výber danej hodnoty nezdôvodňuje. Opäť sa tu teda ukazuje využitie metódy nesprávneho predpokladu. Na uvedenom písomnom riešení je vidieť náznaky dodržania istej logickej postupnosti riešenia: stručný rozbor problému, predstavenie stratégie riešenia, riešenie samotné a zhodnotenie a overenie a záver. . Študentka sa však k podmienkam správneho riešenia vrátila až v posledných krokoch, keď prispôsobila výsledok tak, aby vyhovoval zadaniu.

Riešenie 6.4.4: „Řešení matematického problému „Řetězovka“ si rozdělíme do sedmi kroků. První krok: Ze všeho nejdříve je důležité si stanovit podmínky, které při výpočtu tohoto typu příkladu musíme dodržet.
1. podmínka: součet všech šesti čísel se musí rovnat počtu 100.
2. podmínka: součet čísel na každé straně trojúhelníku musí být stejný.
Druhý krok: V druhém kroku si určíme tři neznámé. První neznámou bude „a“, druhou neznámou „b“ a poslední třetí neznámou bude „c“. Naším úkolem je odhalit tři neznámé (a, b, c), které ze zadaní neznáme (obrázok 6.20).

Obrázok 6.20: Postup študentského riešenia 6.4.4 k problému Reťazovka.



Třetí krok: Ze zadání víme, že součet všech 6 čísel se musí rovnat počtu 100, což je první nejdůležitější informace. Vytvoříme si jednoduchou rovnici pro výpočet tohoto typu příkladu. Tuto rovnici sestavíme na základně číselných údajů, které známe z obrázku, který byl součástí zadání matematického problému. Matematicky vyjádřeno:

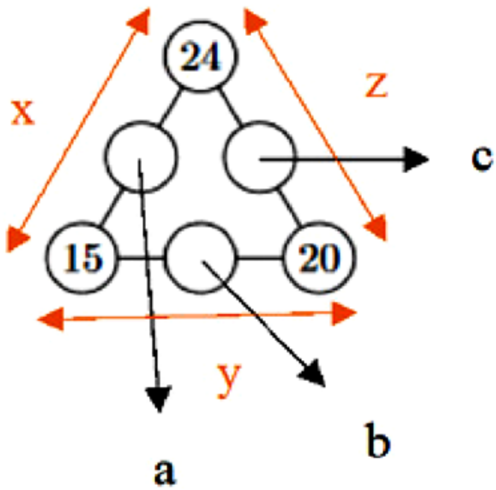
$24 + a + 15 + b + 20 + c = 100$

Na pravou stranu rovnice si převedeme číselné údaje (24, 15, 20). Tyto čísla si převedeme z toho důvodu, abychom si je od sebe mohli odečíst a získali tím pouze jedno číslo, které se bude rovnat třem neznámým. Neznámé (a, b, c) necháme na levé straně rovnice. Neznámé je nazýváme z toho důvodu, že jejich hodnotu neznáme.

$a + b + c = 100 - 24 - 15 - 20$

Poté si vypočítáme pravou stranu rovnice a neznámé (*a, b, c*) necháme stále na levé straně rovnice: $a + b + c = 41$
Z této rovnice je patrné, že součet všech neznámých (*a, b, c*) se musí rovnat počtu 41.
Čtvrtý krok: Víme, že součet čísel na každé straně trojúhelníku musí být stejný, což je druhá nejdůležitější informace. Pro tento krok použijeme opět obrázek (4.22) s našimi neznámými, které jsme si stanovili v druhém kroku a stanovíme si také strany.

Obrázek 6.21: Postup študentského riešenia 6.4.4 k problému Reťazovka.



Díky tomuto obrázku (6.22) s neznámými si pojmenujeme jednotlivé strany, které se musí sobě rovnat.
Stranu: $24 + a + 15$, si nazveme stranou x
Stranu: $15 + b + 20$, si nazveme stranou y
Stranu: $24 + c + 20$, si nazveme stranou z
Jelikož součet čísel na každé straně trojúhelníku musí být stejný, tak se jednotlivé strany musí sobě rovnat: Matematicky vyjádřeno:
$x = y$, tedy: $24 + a + 15 = 15 + b + 20$
$x = z$, tedy: $24 + a + 15 = 24 + c + 20$
$y = z$, tedy: $15 + b + 20 = 24 + c + 20$
Pátý krok: Vyjádříme si jednu neznámou, kterou chceme z rovnic výše odhalit. Zvolíme si neznámou „*a*“. Rovnice přetvoříme tak, abychom zbylé neznámé „*b*“ a „*c*“ mohli vyjádřit pouze ve vztahu ke zvolené neznámé „*a*“, abychom mohli

dosadit do naší rovnice $a + b + c = 41$ pouze čísla a proměnnou „a“! Pro vyjádření nejprve zvolíme rovnost stran x a y.

Nejdříve si vypočítáme pravou a také levou stranu rovnice tak, že sečteme na pravé straně rovnice čísla24 a 15 a na levé straně rovnice sečteme čísla 15 a 20.

$24 + a + 15 = 15 + b + 20 \rightarrow 39 + a = 35 + \mathrm{b}$

Převedeme si neznámou „a“ na pravou stranu rovnice a číslo 35 na levou stranu rovnice, číslice odečteme a osamostatníme si neznámou „b“ převedením neznámé „a“ na druhou stranu, samozřejmě se změnou znaménka a pro větší přehlednost prohodíme strany.

$24 + \mathrm{a} + 15 = 15 + \mathrm{b} + 20 \rightarrow 39 + \mathrm{a} = 35 + \mathrm{b} \rightarrow 39 - 35 = \mathrm{b} - \mathrm{a} \rightarrow 4 = \mathrm{b} - \mathrm{a} \rightarrow 4 + \mathrm{a} = \mathrm{b} \rightarrow \mathrm{b} = 4 + \mathrm{a}$

Tuto výslednou rovnici poté dosadíme do rovnice $a + b + c = 41$ místo písmena „b“.

Tímto způsobem budeme pokračovat i ve vyjádření neznámé „c“ pomocí neznámé „a“ a číslic. Zvolíme si pro tuto operaci informaci o rovnosti součtu stan, tedy stran „x“ a „z“. Sečteme si čísla 24 a 15 na levé straně rovnice a čísla 24 a 20 na pravé straně rovnice.

$24 + a + 15 = 24 + c + 20 \rightarrow 39 + a = 44 + c$

Osamostatníme si neznámou „c“převedením číslice 44 na druhou stranu rovnice, opět se změnou znaménka. (základní matematické pravidlo rovnic)

$24 + a + 15 = 24 + c + 20 \rightarrow 39 + a = 44 + c \rightarrow 39 - 44 + a = c$

Odečteme od sebe číslice 39 a 44, pro větší přehlednost vyměníme pořadí na levé straně rovnice se zachováním znamének. Poté opět prohodíme strany bez změn ve znaménkách (pro větší přehlednost).

$24 + a + 15 = 24 + c + 20 \rightarrow 39 + a = 44 + c \rightarrow 39 - 44 + a = c \rightarrow -5 + a = c \rightarrow$
$a - 5 = c \rightarrow c = a - 5$

Tuto výslednou rovnici dosadíme poté do rovnice $a + b + c = 41$ místo písmena „c“.

Protože máme vyjádřeny neznámé „b“ a „c“ prostřednictvím zvolené neznámé „a“, není tím pádem zapotřebí vytvářet třetí rovnici rovnosti stran $y = z$.

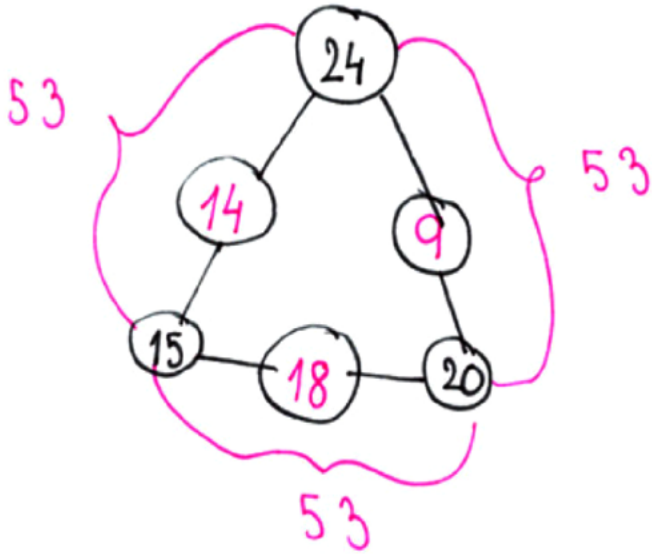
Šestý krok: Do rovnice $a + b + c = 41$, kterou jsme si vypočítali ve třetím kroku tohoto matematického problému, dosadíme dvě rovnice, které jsme si vypočítali v předešlém pátém kroku. Matematicky vyjádřeno: $b = 4 + a$, dosadíme do rovnice: $a + b + c = 41$ místo neznámé „b“. $a + (4 + a) + c = 41$.“

Uvedené študentské riešenie je ukážkou písomného prejavu na vyššej úrovni. Síce je opäť rozdelené do oddelených celkov v podobe krokov riešenia, tie sú ale dostatočne popísané a navzájom prepojené. Čo je dôležité, študentka do svojho riešenia zahrnula aj rozbor úlohy, ktorý obsahoval položené podmienky pre riešenie problému, definovanie nielen hľadaných neznámych, ale pracuje s odlišnými parametrami pre strany trojuholníka, pri riešení pracuje so zápisom usporiadaných trojíc. Jednotlivé kroky sú správne a jasne popísané a vytvára tým návod pre riešenie rovníc s viacerými neznámymi.

Riešenie 6.4.5:

„1. Příklad začínáme řešit tím, že si tři čísla, které jsou zapsané v trojúhelníku, sečteme: $24 + 15 + 20 = 59$.
2. Číslo, které nám vyšlo, 59, odečteme od čísla 100, protože součet všech kroužků v trojúhelníku má být 100. Potřebujeme zjistit, jaké číslo musíme rozdělit mezi tři prázdné kroužky: $100 - 59 = 41$.
3. Dále sečteme na každé straně trojúhelníku, čísla, která už jsou vypsaná v zadání. Děláme tak proto, abychom věděli, jaký součet má každá strana trojúhelníku.
   $24 + 15 = 39;\ 15 + 20 = 35;\ 20 + 24 = 44$
4. Součet jednotlivých stran jsme zjistili a nyní si zvolíme nejbližší celé číslo, které budou mít tyto tři strany stejné. V tomto případě je to číslo 50. Musíme se řídit tím, že každá strana trojúhelníku má mít stejný součet. Od tohoto čísla odečteme jednotlivé strany trojúhelníku.
   $50 - 39 = 11;\ 50 - 35 = 15;\ 50 - 44 = 6$
5. U jednotlivých stran nám vyšla jiná čísla. Tyto čísla sečteme.
   $11 + 15 + 6 = 32$.
6. Od čísla 41 odečteme součet předešlých čísel (32). Číslo 41 jsme získali ve druhém kroku tohoto řešení příkladu. Děláme tak proto, abychom zjistili, kolik čísel nám zbývá k doplnění do tří prázdných kroužků: $41 - 32 = 9$.
7. Toto číslo vydělíme 3. Potřebujeme ho rozdělit mezi naše tři strany trojúhelníku: $9 : 3 = 3$.
8. Ve čtvrtém kroku jsme zjistili, jaké číslo chybí na každé straně trojúhelníku, aby nám jednotlivé strany dali stejný součet a to 50. V šestém kroku jsme ale zjistili, že nám zbývá ještě 9 čísel, které jsme rozdělili do tří stran, proto součet jednotlivých stran, který má být stejný na každé straně, nebude 50, ale 53. Proto budeme k číslům, které, jsme vypočítali ve čtvrtém kroku, přičítat číslo 3: $11 + 3 = 14;\ 15 + 3 = 18;\ 6 + 3 = 9$.
9. Tyto čísla jsou výsledkem a doplníme je do prázdných kroužků v trojúhelníku.“

Obrázek 6.22: Postup študentského riešenia 6.4.5 problému Reťazovka.



10. Na obrázku (4.23) můžeme vidět, že podmínka, aby součet čísel na každé straně byl stejný, je splněná. Druhou podmínku, aby součet všech kroužků v trojúhelníku byl 100, dokážeme tak, že všechny kroužky sečteme a dostaneme číslo 100.

Študentka v poslednej ukážke riešenia 4.4.5 ponúkla zaujímavý postup riešenia vedúci k odvodeniu hľadaných číslic. V krokoch riešiteľského postupu popisuje systém postupného sčítavania, odčítavania hodnôt, ku ktorým sa študentka dopracovala. Výsledok vyšiel správny, ale chýba overenie či sa jedná o univerzálny postup, či by vyšiel správny výsledok po dosadení inej hodnoty, ako ju popisuje „najbližšie celé číslo ku všetkým stranám". Toto slovné spojenie nie je úplne správne a aj v celom písomnom riešení je využitá matematická argumentácia na základnej úrovni. Na prvý pohľad sa tak písomné riešenie môže zdať ako prepracované, ale jedná sa o rozpísanú stratégiu „pokus–omyl".Vynechané sú kroky, kedy výsledok nevyšiel. Je potrebné vyzdvihnúť, že text je veľmi ľahko čitateľný.

Tabulka 6.6: Hodnotenie študentských riešení problému Reťazovka (problém 6.4)

	MKomp	Písomný prejav žiakov			Kreativita			Spolu
		PP_O	PP_A	PP_J	KR_O	KR_S	KR_A	
Riešenie 6.4.1	2	2	2	2	3	2	2	16
Riešenie 6.4.2	3	3	3	2	3	2	2	17
Riešenie 6.4.3	3	2	3	3	2	2	1	16
Riešenie 6.4.4	4	4	5	4	3	4	3	27
Riešenie 6.4.5	2	3	2	3	2	2	1	15

Problém s názvom „*Reťazovka*“ mal rovnako charakter hlavolamu, avšak ako matematický problém sa týkal aritmetiky. Formulácia zadania však viac nabádala k využívaniu základných operácií, a teda viac podnecuje u študentov vnímanie matematického kontextu. Využívanie matematických kompetencií sa odráža aj v hodnotení (tabuľka 6.6).

7/ DISKUSIA

Riešenie matematických problémov vyžaduje viac ako ovládanie algoritmov (Tatsis & Maj, 2010). Kompetencia riešiť matematické problémy je závislá od kognitívnych, metakognitívnych i afektívnych faktorov (Medová, 2020b). Je potrebné zvládať aj zložité myšlienkové procesy, navyše prežívať úspech alebo neúspech v riešení. Takáto komplexná skúsenosť vedie ku kritickému náhľadu na riešenie problémov v matematike, ako aj hlbšiemu porozumeniu matematiky (Frobisher & Frobisher, 2015b). Navyše, rozhodnutie o výbere a použití adekvátnej stratégie riešenia je u žiakov dôležitým krokom, či už ide o abstraktný problém alebo o problém s reálnym kontextom (Tatsis & Maj, 2010). Pri vyšších kognitívnych procesoch, medzi ktoré patrí aj matematické modelovanie, sú matematické kompetencie nielen uplatňované, ale aj získavané a prehlbované (Weinhandl & Lavicza, 2021).

Pri riešení otvorených matematických problémov je podstatnou zložkou motivácia žiakov, ktorá môže ovplyvňovať úspešnosť jej riešenia (Vondrová et al., 2019). Jednou z príčin je aj spoliehanie sa žiakov na využívanie len naučených algoritmov a známych postupov, teda už spomínaných tzv. povrchných matematických stratégií. Tento prístup sa následne odráža aj v písomnom prejave žiakov pri komponovaní záverečnej správy o riešení. Rozvoj písomného prejavu totiž patrí medzi matematické zručnosti, rovnako ako napríklad schopnosť riešiť rovnice (Lee, 2010). Podľa Weinhandla & Laviczu (2021) má kreatívne myslenie rovnaký základ s riešením otvorených matematických problémov. Jedným z možných spôsobov, ako pomôcť žiakom rozvíjať schopnosť riešenia otvorených matematických problémov, by mohlo byť ukázať im príklad riešenia problému s reálnym kontextom a zaradiť tvorivé uvažovanie a argumentáciu ako bežnú súčasť aktivít v triede počas hodín matematiky (Bergqvist & Lithner, 2005; Novotná, et al., 2015).

Hodnotenie písomných žiackych riešení má priniesť nielen prehľad o prejavenej úrovni výkonov žiakov. Avšak pri rozoberaní krokov, ktoré žiaci či študenti vo svojom riešení použili, môže hodnotiteľ narážať na rovnaké druhy chýb, nedostatkov alebo zlyhaní. Tieto podobné prejavy priamo poskytujú prehľad o úrovni prejavených kompetencií žiakov (Morgan, 2000). Rubriky pre hodnotenie prejavených matematických atribútov a atribútov potrebných pre matematické skúmanie majú slúžiť pre objektívne hodnotenie písomných žiackych riešení otvorených matematických problémov.

Zhotovený systém rubrík má širšie využitie, a to z pohľadu funkcie formatívneho aj sumatívneho hodnotenia. Pri pozorovaní dosiahnutých úrovní hodnotených atribútov je možné vyhodnotiť riešenia v určitom poradí. Slovný popis úrovne, ktorú žiaci v rámci hodnoteného atribútu dosahujú, možno využiť ako spätnú väzbu. Na rozdiel od štandardného testovania ponúka informačnú hodnotu pre učiteľa ako aj pre žiaka. Spätná väzba získaná cez analýzu pozorovateľných javov v procese učenia sa u žiakov, napomáha k zefektívneniu budúcich cieľov (Tempelaar et al., 2013).

Vytvorené rubriky boli zostavené ako popis výkonov žiakov prejavený v spoločnom úsilí. Celkový vývoj tímovej spolupráce žiakov je totiž závislý od jednotlivých funkcií členov tímu a ich vzájomných interakcií (Baker & Salas, 1992). Analyzované žiacke riešenia sú odovzdávané vo forme jednej písomnej správy za celý tím. Rubriky tak predstavujú vypracovaný návrh na hodnotenie úrovne kvality písomných žiackych riešení, avšak bez špecifikácie či sa jedná o výkon jednotlivcov alebo tímovej spolupráce.

Výber kľúčových atribútov sa odvíjal od prejavených matematických kompetencií, ako aj od opakujúcich sa prejavov, ktoré mali vplyv na mieru kvality záverečného písomného riešenia: písomný prejav žiakov a miera kreativity pri riešení otvorených matematických problémov. Každý zo spomenutých atribútov obsahuje tri aspekty, ktoré bližšie špecifikujú hodnotený atribút. Pri posudzovaní úrovne prejaveného žiackeho výkonu v písomných riešeniach otvorených matematických problémov sa hodnotí spolu sedem položiek, ktoré boli v priebehu realizácie výskumu identifikované:

- matematické kompetencie (v prípade vytvárania matematického modelu prejavené procesy objavného vyučovania),
- obsah písomnej správy,
- matematická argumentácia,
- jasnosť a čitateľnosť textu,
- originalita,
- miera správnosti výsledkov a záverov,
- aplikovateľnosť záverov a hodnota pre ďalšie skúmanie.

Písomné žiacke riešenia otvorených matematických problémov možno kódovať využitím rubrík, ktoré sú popísané v kapitole 3. Následne, prostredníctvom využitia kvantitatívnych nástrojov, skúmať vzájomné závislosti alebo implikačné pravidlá medzi úrovňami dosiahnutými vo vybraných atribútoch a prejavenými matematickými kompetenciami alebo skúmať, ktoré atribúty v riešení zadaných problémov mali rozhodujúci význam pre výkon v matematickom skúmaní v zmysle prejavených procesov objavného vyučovania podobne ako v práci Medová, Ovary Bulková & Čeretková (2020).

Pri realizácii výskumu boli využité vybrané metódy kvalitatívneho výskumu. Následná prípadová štúdia, spojením priameho, ako aj nepriameho pozorovania a analýzy písomných žiackych riešení môže priniesť širší náhľad na celkový vplyv všetkých alebo na konci kapitoly identifikovaných atribútov na priebeh vzájomnej spolupráce žiakov a na preukázanú úroveň výkonu žiakov v ich písomnom riešení otvorených matematických problémov.

Pri riešení komplexných otvorených matematických problémov, ako sú zadania súťaže Matematický B-deň, je možné pozorovať väčšinu kreatívnych matematických aktivít definovaných Klaklom (2002) ako uvádza Maj (2010), či už ide o formulovanie hypotéz, kreatívne spracovanie alebo využitie matematických informácií, alebo prenos princípu zdôvodnenia či spôsobu riešenia. Ako uvádza Maj (2010), prenos metód riešenia je možný hlavne pri komplexných úlohách pozostávajúcich zo série čiastkových problémov, ktoré prepájajú rôzne kreatívne matematické aktivity.

Počas vyučovacích hodín zameraných na riešenie komplexných otvorených problémov stimulujúcich kreatívnu matematickú aktivitu má učiteľ rolu facilitátora. Práve riešenie tohto typu problémov v roli žiaka pomáha budúcemu učiteľovi, tak pre primárne ako aj sekundárne vzdelávanie, nadobudnúť dostatočné pedagogické kompentencie, aby bol schopný žiakom poskytnúť adekvátnu učebnú oporu (Zaslavsky, 2008). Naviac, ako uvádzajú Tatsis & Maj (2010), je okrem didaktickej znalosti obsahu rozvíjaná aj matematická gramotnosť budúcich učiteľov. Podobne, aj poskytnutá spätná väzba na riešenie otvorených matematických problémov slúži ako nástroj rozvíjania matematických schopností pre vyučovanie, hlavne v oblasti hodnotenia. Rubriky vytvorené a podrobne popísané v tejto publikácii, je vhodné využiť v príprave budúcich učiteľov.

ZÁVER

Riešenie otvorených matematických problémov vyžaduje vysokú úroveň vedomostí i zručností, ako aj metakognitívnych schopností žiakov. Žiacke riešenia otvorených matematických problémov predstavujú vhodný prostriedok na pozorovanie a ako sme ukázali v publikácii, i na hodnotenie matematických kompetencií žiakov. Hlavným cieľom bolo vytvorenie hodnotiaceho nástroja pre písomné žiacke riešenia otvorených matematických problémov. Vzhľadom na širokú škálu možných prístupov k riešeniu, sa ako vhodný nástroj, aspoň čiastočne objektivizujúci hodnotenie, ukázali rubriky. Podrobným rozpracovaním doterajších štúdií o formatívnom hodnotení v matematike a o hodnotení žiackych riešení nerutinných problémov, a následným spojením s výsledkami analýzy písomných žiackych riešení zo súťaže Matematický B-deň, boli zostavené šesťúrovňové rubriky pre hodnotenie vybraných atribútov.

Okrem rubrík pre hodnotenie matematických kompetencií boli vytvorené aj rubriky na hodnotenie procesov matematického skúmania. Okrem správnosti riešenia boli identifikované aj atribúty, ktorými je možné hodnotiť písomný prejav a originalitu pri riešení otvorených matematických problémov. Nebolo možné oddeliť ich úroveň od vecnej správnosti riešenia. Základ pre hodnotenie všetkých popísaných atribútov rešpektuje šesť úrovní kognitívnych procesov Revidovanej Bloomovej taxonómie vzdelávacích cieľov.

Pri hodnotení schopnosti žiakov, i budúcich učiteľov matematiky, písať matematický text, môžu byť využité rubriky pre evaluáciu obsahu, matematickej argumentácie, či jasnosti a čitateľnosti textu riešenia. Ukázalo sa, že budúci učitelia primárneho vzdelávania nemajú tendenciu poskytnúť hlbší popis svojho riešiteľského postupu a zdôvodniť správnosť svojho riešenia. Z toho vyplýva potreba zaradenia otvorených matematických problémov a ich kvalitného hodnotenia aj do prípravy učiteľov pre primárne vzdelávanie.

Rôzna miera otvorenosti problémov prináša priestor pre prejavenie kreatívneho prístupu i kreatívnych matematických aktivít. Pri hodnotení kreativity boli vytvorené rubriky pre hodnotenie matematickej správnosti, originality a ďalšej aplikovateľnosti tak získaných výsledkov, ako aj postupu riešenia a spôsobu matematickej argumentácie.

V rámci vyhodnocovania úspešných riešiteľov boli identifikované atribúty pre hodnotenie matematických kompetencií a výkonu riešiteľov v riešení otvorených matematických problémov. Celkovým výstupom z realizovaného výskumu komplexnej analýzy písomných riešení otvorených matematických problémov, je vytvorený systém rubrík, ktorý slúži ako hodnotiaci nástroj predovšetkým pre formatívne hodnotenie.

Príprava budúcich učiteľov na využívanie vyučovacích metód a foriem vychádzajúcich z konštruktivistických teórií učenia na hodinách matematiky sa nezaobíde bez riešenia otvorených matematických problémov a jeho následného hodnotenia. Pre dosiahnutie adekvátnej náročnosti je vhodné využiť úlohy z matematických súťaží, ako je napríklad Matematická olympiáda alebo Matematický B-deň. Aplikovanie vytvorených rubrík na písomné riešenia otvorených matematických problémov z Matematickej olympiády študentmi učiteľstva pre primárne vzdelávanie ukázala, že študenti nemajú tendenciu popisovať svoj riešiteľský postup a poskytovať validnu matematickú argumentáciu. Tu sa otvára priestor a nové podnety pre ďalšie skúmanie vplyvu zaradenia vytvoreného hodnotenia na pedagogické kompetencie a na didaktickú znalosť matematického obsahu.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (Eds). (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing: A revision of Bloom´s Taxonomy of Educational Objectives: Complete edition*. New Yourk: Longman.

Baker, D.P., & Salas, E. (1992). Principles for Measuring Teamwork Skills. *Human factors,* 34(4), 469–475.

Balka, D. S. (1974). Using research in teaching: Creative ability in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *21*(7), 633–636.

Bergqvist, T., & Lithner, J. (2005). *Simulating creative reasoning in mathematics teaching*. Department of Mathematics and Mathematical Statistics, Umeå universitet.

Blaško, M. (2013). *Kvalita v systéme modernej výučby*. Košice: Technická univerzita.

Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of educational objectives. The Classification of Educational Goals*. Michigan: Edward Bros.

Boaler, J. (1998). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and Understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 41–62.

Boaler, J. (2002). *Experiencing school mathematics*: Traditional and reform approaches to teaching and their impact on student learning: Routledge.

Boaler, J. (2015). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*: John Wiley a Sons.

Boaler, J., & Selling, S. K. (2017). Psychological Imprisonment or Intellectual Freedom? A Longitudinal Study of Contrasting School Mathematics Approaches and Their Impact on Adults' Lives. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(1), 78–105.

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2018). Assessing mathematical competencies: an analysis of Swedish national mathematics tests. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 62(1), 109–124.

Borgersen, H. (1994). Open ended problem solving in geometry. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 2(2), 6–35.

Bottge, B. A. (1999). Effects of Contextualized Math Instruction on Problem Solving of Average and Below-Average Achieving Students. *The Journal of Special Education*, 33(2), 81–92.

Brookhart, S. M. (2013). *How to Create and Use Rubrics for Formative Assessment and Grading*. Alexandria, Virginia.

Bulková, K. (2015*) Matematické záhady, hlavolamy a rébusy a ich úloha v budovaní matematickej gramotnosti* [diplomová práca]. Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre.

Bulková, K. (2017, 26. apríl). *Písomný prejav žiakov v riešeniach otvorených matematických problémov* [zborník recenzovaných príspevkov z konferencie]. Nitra, Banská Bystrica, Slovenská republika.

Bulková, K., & Čeretková, S. (2017a, 1. február). *Rubrics as assessment tool of mathematical open-ended problems* [zborník recenzovaných príspevkov z konferencie]. 16th APLIMAT 2017: Conference on Applied Mathematics, Bratislava, Slovenská republika.

Bulková, K., & Čeretková, S. (2017b, júl). *Creativity as assessed attribute in mathematical open enden problem solving* [zborník recenzovaných príspevkov z konferencie]. EDULEARN 17: 9th International Conference on Education and New Learning Technologies Barcelona, Barcelona, Španielsko.

Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The Cyclic Nature of Problem Solving: An Emergent Multidimensional Problem-Solving Framework. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 45–75. doi: 10.1007/s10649-005-0808-x

Čeretková, S. (2014). Objavné vyučovanie matematiky prostredníctvom úloh súťaže Matematický B-deň. In J. Molnár, & P. Peška (eds.) *Zvyšování kompetencí studentů DSP v oblasti didaktiky matematiky* (pp. 6–19). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.

Čeretková, S., Bulková, K., Jenisová, Z., Kramáreková, H., Lovászová, G., Nemčíková, M., … & Valovičová, Ľ. (2017). Stratégie tvorivého a kritického myslenia v príprave učiteľov prírodovedných predmetov, matematiky a informatiky. *Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre*.

Cígler, H. (2018). *Matematické schopnosti. Teoretický přehled a jejich měření.* Brno: Masarykova univerzita.

Doorman, L. M., Jonker, V. & Wijers, M. M. (2016). *Mathematics and Science in Life: Inquiry Learning and the World of Work*. Freiburg: University of Education Freiburg.

Dorier, J. L., & Maass, K. (2020). Inquiry-based mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 384–388.

Eizenberg, M. M., & Zaslavsky, O. (2004). Students' Verification Strategies for Combinatorial Problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(1), 15–36. doi: 10.1207/s15327833mtl0601_2

Elgrably, H., & Leikin, R. (2021). Creativity as a function of problem-solving expertise: Posing new problems through investigations. *ZDM–Mathematics Education*, 1–14.

Fisher, R., Malle, G. (1985). *Človek a matematika. Úvod do didaktického myslenia a konania.* Bratislava: SPN.

Forehand, M. (2010). Bloom's taxonomy. *Emerging perspectives on learning, teaching, and technology*, *41*(4), 47–56.

Frobisher, A. & Frobisher, L. (2015a) *Didaktika matematiky I*. Bratislava: RAABE.

Frobisher, A. & Frobisher, L. (2015b) *Didaktika matematiky II*. Bratislava: RAABE.

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of curriculum studies*, *32*(6), 777–796.

Häkkinen, P., Järvelä, S., Mäkitalo-Siegl, K., Ahonen, A., Näykki, P., & Valtonen, T. (2017). Preparing teacher-students for twenty-first-century learning practices (PREP 21): a framework for enhancing collaborative problem-solving and strategic learning skills. *Teachers and Teaching*, *23*(1), 25–41.

Havlíčková, R. (2020). Vliv atraktivity kontextu matematické slovní úlohy na řešitelský proces. *Scientia in educatione*, *11*(1), 2–21.

Henderson, K. B., & Pingry, R. E. (1953). Problem-solving in Mathematics. In H. F. Fehr (Ed.), *The Learning of Mathematics: its theory and practice* (pp. 228–271). Washington, D.C.: NCTM.

Howison, D. (n.d.) *Mathematics report*. Mathematics Task Centre. https://mathematicscentre.com/taskcentre/rubric_mc.pdf

Chan, M. C. E., & Clarke, D. (2017). Structured affordancesin the use of open-ended tasksto facilitate collaborative problem solving. *ZDM*, 49(6), 951-963.

Chiu, M. M. (2001). Using Metaphors to Understand and Solve Arithmetic Problems: Novices and Experts Working With Negative Numbers. *Mathematical Thinking and Learning*, 3(2–3), 93–124. doi: 10.1080/10986065.2001.9679970

Jančařík, A. (2013). *Vybrané teorie učení a jejich projekce do využívaní ICT ve výuce matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze

Janečková, M., & Čeretková, S. (2015). *Objavné vyučovanie matematiky.* Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of mathematics teacher education*, *9*(2), 187–211.

Jodi, W. & Antoniou, M. (n.d.) *5 Square Reporting – Assessment Rubric*. Mathematics Task Centre. https://mathematicscentre.com/taskcentre/rubric_me.pdf

Kamp, A. (2016). *Engineering Education in the Rapidly Changing World. Rethinking the Vision for Higher Engineering Education*. TU DEFT.

Kenderov, P. S. (2006, August). Competitions and mathematics education. In *Proceedings of the international congress of mathematicians* (pp. 1583–1598). Madrid: IMU.

Kilpatrick, J. (1978). *Variables and methodologies in research on problem solving. Mathematical problem solving*, 7–20.

Koçak, Z. F., Bozan, R., & Işık, Ö. (2009). The importance of group work in mathematics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *1*(1), 2363–2365.

Kopka, J. (2010) *Ako riešiť matematické problémy*. Ružomberok: Verbum.

Košč, L. (1972) *Psychológia matematických schopností.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Košťálová, H., Miková, Š., & Stang, J. (2008). *Školní hodnocení žáků a studentů se zaměřením na slovní hodnocení*. Praha: Portál.

Krathwohl, D. R. (2002). A revision of Bloom's taxonomy: An overview. *Theory into practice*, *41*(4), 212–218.

Krejčová, L. (2013). *Žáci potřebují přemýšlet*. Praha: Portál.

Lednický, L. (2015). Tvorivosť a objavnosť – predpoklad zvyšovania efektívnosti vyučovania matematiky [Dizertačná práca]. Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre.

Lee, K. P. (2010) *A Guide to Writing Mathematics*. https://web.cs.ucdavis.edu/~amenta/w10/writingman.pdf

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. *Zdm*, *45*(2), 159–166. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0459-1

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem Solving, Modeling, and Local Conceptual Development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2–3), 157–189. doi: 10.1080/10986065.2003.9679998

Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, 41–69.

Lock, R. (1990). Open-ended, problem-solving investigations. *School science review*, *71*(256), 63–72.

Lockhoff, J., Wegejis, B., Durkin, K., Wagenaar, R., González, J., Dalla Rosa, L., … & Gobbi, M. (2011). *A guide to formulating degree programme profiles. Including programme competences and programme learning outcomes*. University of Deusto.

Lukáč, S., Sekerák, J. (2011). Interaktívne vzdelávacie aktivity stimulujúce rozvíjanie kľúčových kompetencií. *Matematika Informatika Fyzika: didaktický časopis učiteľov matematiky, informatiky, fyziky*, 36, (61–68).

Maj, B. (2010). The role of multistage tasks in developing creative activities among mathematics teachers. *Didactica Mathematicae*, 33.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2004). Realization of techniques in problem solving: the construction of bijections for enumeration tasks. *Educational Studies in Mathematics,* 56(2–3), 235–253.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24 (3), 385–401. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.011

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, *30*(2), 236–260.

Marzano, R. J. & Kendall, J. S. (2007) *The new Taxonomy of Educational Objectives.* London: Corwin Press.

Matematická olympiáda (2014) *64. ročník Matematické olympiády*, I. kolo kategorie Z5. http://www.matematickaolympiada.cz/media/1026021/z64.pdf

Matematický B-deň 2015 (2015). *Za rohom…* (zadanie súťaže). http://www.primas.ukf.sk/download/bday/Matematicky_B-den_2015_SK.pdf

Matematický B-deň 2016 (2016) *Výborná sada hracích kociek* (zadanie súťaže). http://www.primas.ukf.sk/download/bday/Zadanie_Bday_2016_SK.pdf.

Matematický B-deň 2017 (2017) *Šípové hodiny* (zadanie súťaže). http://www.primas.ukf.sk/download/bday/B_den_2017_SK.pdf.

Matematický B-deň 2018 (2018) *Hadíkovo hniezdo* (zadanie súťaže). http://www.primas.ukf.sk/download/bday/B-den_2018_zadanie_SK.pdf

Matematický B-deň 2019 (2019) *Spoj a panuj* (zadanie súťaže). http://www.primas.ukf.sk/download/bday/2019/SK_Bden_2019_zadanie.pdf

Medová, J. (2020a) Profesionálny rast učiteľov a vzdelávateľov učiteľov v kontexte objavného vyučovania matematiky [Habilitačná práca], Univerzita Konštantína Filozofa.

Medova, J. (2020b). Rozvoj kombinatorického myslenia prostredníctvom riešenia matematických problémov. [Habilitačná prednáška], Univerzita Konštantína Filozofa.

Medová, J., Bulková, K. O., & Čeretková, S. (2020). Relations between Generalization, Reasoning and Combinatorial Thinking in Solving Mathematical Open-Ended Problems within Mathematical Contest. *Mathematics*, *8*(12), 2257.

Morgan, C. (2000). Better Assessment in Mathematics Education? A Social Perspective. In J. Boaler (ed.): *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*, 2000. London: Ablex Publishing, (225–242).

Moseley, B. (2005). Students' Early Mathematical Representation Knowledge: The Effects of Emphasizing Single or Multiple Perspectives of the Rational Number Domain in Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 37–69.

National Research Council (2000). *Inquiry and the national science education standards: A guide for teaching and learning*. Washington DC: National Academies Press.

National Research Council (2011). *Assessing 21st century skills*. Washington DC: National Academies Press.

Niss, M. (2003, January). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115–124).

Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*. 102(9), 9–28.

Nesher, P., Hershkovitz, S., & Novotna, J. (2003). Situation model, Text Base and what else? Factors affecting Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*, 52(2), 151–176. doi: 10.1023/a:1024028430965

Nohda, N. (2000). Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom. In *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 39–53). Japan

Norwood, R., Poole, G., & Laidacker, M. (1992). The worm problem of Leo Moser. *Discrete & Computational Geometry*, *7*(2), 153–162. doi: 153–162. 10.1007/BF02187832.

Novotná, J. (2010) *Study of solving word problems in teaching of mathematics: From atomic analysis to the analysis of situation*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing.

PISA 2015 (2017) *Collaborative Problem Solving Framework*. OECD. http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Collaborative%20Problem%20Solving%20Framework%20.pdf

Pólya, G., & Conway, J. H. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Powell, A. B., Borge, I. C., Fioriti, G. I., Kondratieva, M., Koublanova, E., & Sukthankar, N. (2009). Challenging tasks and mathematics learning. In *Challenging mathematics in and beyond the classroom* (pp. 133–170). Springer, Boston, MA.

PRIMAS (2012). *Matematický B-day*. http://www.primas.ukf.sk/bday.html

PRIMAS. (2013). *Inquiry-Based Learning in maths and science classes. What i tis and how it works – examples – experience*. Freiburg: PH Freiburug.

Pugalee, D. K. (2004). A Comparison of Verbal and Written Descriptions of Students' Problem Solving Processes. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1), 27–47. doi: 10.1023/B:EDUC.0000017666.11367.c7

Pugalee, D. K. (2005). *Writing To Develop Mathematical Understanding*. Christopher--Gordon Publishers, INC.

Reitmayerová, E., & Broumová, V. (2007). *Cílená zpětná vazba – Metody pro vedoucí skupin a učitelé*. Praha: Portál.

Russek, B. (1998). Writing to learn mathematics. *Writing Across the Curriculum*, *9*, 36–45.

Šedivý, O., Pavlovičová, G., Rumanová, L., Vallo, D., Vidermanová, K., & Záhorská, J. (2013). *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky*. Nitra: FPV UKF v Nitre.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: PRoblem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 334370. (pp. 334–370).

Sirajudin, N., Suratno, J., & Pamuti (2021). Developing creativity through STEM education. In *Journal of Physics: Conference Series*. 1806(1), p. 012211. 10.1088/1742-6596/1806/1/012211

Slovenská komisia matematickej olympiády (2013) *Matematická olympiáda, 63.ročník školský rok 2013/2014 (domáce kolo Z5).* https://skmo.sk/dokument.php?id=968

Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? In *Proceedings of the 25th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, Netherlands.

Starý, K., Laufková, V. a kol. (2016). *Formativní hodnocení ve výuce*. Praha: Portál.

Strouhal, M. (2013). *Teorie výchovy: k vybraným problémům a perspektivám jedné pedagogické disciplíny: klíčové momenty ve vývoji myšlení o výchově, výchovné antinomie a mnohost pedagogických diskursů, teorie výchovy mezi filosofií a vědou, výchova jako formativní proces, pedagogika v období postmoderny, pedagogika jako snění o ideálech*. Praha: Grada Publishing, a.s..

Suchožová, E. (2014). *Rozvíjanie a hodnotenie kľúčových kompetencií v Edukačnom procese*. Bratislava: Metodicko-pedagogické centrum.

Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 Students' Preinstructional Use of Equations to Describe and Represent Problem Situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 89–112. doi: 10.2307/749821

Tatsis, K., & Maj, B. (2010). Pre-service mathematics teachers strategies in solving a real-life problem. (379–385).

Tempelaar, D. T., Heck, A., Cuypers, H., van der Kooij, H., & van de Vrie, E. (2013, April). Formative assessment and learning analytics. In *Proceedings of the third international conference on learning analytics and knowledge* (pp. 205–209).

Thom, J. S., & Pirie, S. E. B. (2002). Problems, perseverance, and mathematical residue. *Educational Studies in Mathematics*, 50(1), 1–28. doi: 10.1023/A:1020507300013

Torrance, E. P. (1965). *Rewarding Creative Behavior; Experiments in Classroom Creativity*.

Turner, R. (2010). Exploring mathematical competencies. *Research Developments*, *24*(24), 5.

Urquhart, V. (2009). Using Writing in Mathematics to Deepen Student Learning. *Mid-continent Research for Education and Learning (McREL)*. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED544239.pdf

Utrecht University (n.d.) *Mathematics B-day*. https://www.uu.nl/en/education/mathematics-b-day

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 713–717.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: An eye movement test of Lewisand Mayer's consistency hypothesis.*Journal of Educational Psychology*,84(1), 85–94.https://doi.org/10.1037/0022-0663.84.1.85

Vincejová, E. (2013) *Plánovanie edukačných procesov*. Bratislava: Metodicko--pedagogické centrum v Bratislave.

Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I.,Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*.Praha: Nakladatelství Karolinum.

Wagner, N. R. (1976). The Sofa Problem. *American Mathematical Monthly*.83(3), 188–189.

Weisberg, R. (1998). Creativity and Knowledge: A Challenge to Theories. In R. Sternberg (Ed.), *Handbook of Creativity* (pp. 226–250). Cambridge.

Weinhandl, R., & Lavicza, Z. (2021). Real-World Modelling to Increase Mathematical Creativity. *Journal of Humanistic Mathematics*, 11(1), 265–299.

Yeo, J. B. W., & Yeap, B. H. (2010). Characterising the Cognitive Processes in Mathematical Investigation. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.

Žák, P. (2004). *Kreativita a její rozvoj*. Brno: Computer Press.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. In *The Handbook of Mathematics Teacher Education*, 4. (93–114). Brill Sense.

Zelina, M., & Zelinová, M. (1990). *Rozvoj tvorivosti detí a mládeže.* Bratislava: SPN.

Zhouf, J. (2010). *Tvorba matematických problémů pro talentované žáky*. Praha: Univerzita Karlova.

SUMMARY

Open-ended mathematical problems represent a proper tool for observing students conceptual as well as procedural knowledge. The way of solvers thinking is not clear and due to the wide range of possibilities for solving an open-ended mathematical problem, the evaluation of the solutions can be strongly influenced by the subjective opinion of the evaluator. The correctness of the result indicates the higher students' competencies, but also the steps of approach used to solve the problem is in the focus of the assessment. Quality of the written report depends also by methods how students are able to process the knowledge and to develop new conclusions. The aim of the research is to identify and analyse the manifested mathematical competencies of students in written solutions of the open-ended mathematical problems and to create a universal tool for evaluating students' written solutions. Rubric represents the suitable tool for describing students' performance in their solution. The basis for the evaluation of mathematical competencies will be formed through six levels of the dimension of cognitive processes of the Revised Bloom's taxonomy of educational goals. The descriptions of the six levels are created also for other attributes such as students' written skills and the level of creativity in students' manifested written solutions. The publication describes the all process of creating a system of rubrics as well as a description of levels for 6 criterias: three criterias for mathematical writing skills (mathematical content, mathematical reasoning, clarity and readability) and three criterias for creativity (originality, correctness of the soluton, applicability of conclusions and solving process value for following studies). Authentic students' solutions from the team contest called Mathematics B-day were used for the analysis. The goal of the contest is to support inquiry in mathematics. To demonstrate the broad applicability of the developed rubrics, they were applied as an assessment tool of authentic solutions of problems

from the Mathematics B-day contest solved by teams of upper-secondary students and also of the problems from Mathematical olympiads solved individually, by pre-service primary teachers within mathematical course of their initial teachers education.

Univerzita Tomáše Bati
Fakulta humanitních studií

Název: Hodnocení matematických kompetencí
při řešení otevřených matematických problémů

Autoři: Kristína Ovary Bulková, Janka Medová,
Soňa Čeretková, Anna Tirpáková

Grafická úprava a sazba: Nakladatelství UTB

Foto na obálce: Lubo Balko

Vydavatel: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2021

Pořadí vydání: První

Vydáno elektronicky

Vědecký redaktor: prof. RNDr. Michal Munk, PhD.

Recenzenti: prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.
doc. PaedDr. Gabriela Pavlovičová. PhD.

ISBN 978-80-7678-045-3