

Hodnocení metod komprese pro zpracování statických barevných fotografií

Stanislav Šebák

Bakalářská práce
2008



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
Ústav aplikované informatiky
akademický rok: 2007/2008

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Stanislav ŠEBÁK**
Studijní program: **B 3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Informační technologie**

Téma práce: **Hodnocení metod komprese pro zpracování
statických barevných fotografií.**

Zásady pro vypracování:

1. Zhodnocení aktuálně používaných metod komprese.
2. Výběr vhodných metod realizovatelných dostupnými finančními prostředky.
3. Hodnocení zohledňující uživatelské vlastnosti a nároky na čas při použití mobilních tech. prostředků.

Rozsah práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. Hlaváč, V., Sedláček, M.: Zpracování signálu a obrazu, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2001.
2. Vlček, K.: Komprese a kódování zabezpečení, edice BEN, Praha, 2004.
3. Prchal, J., Šimák, B.: Digitální zpracování signálu v telekomunikaci, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2001.

Vedoucí bakalářské práce:

prof. Ing. Karel Vlček, CSc.
Ústav aplikované informatiky

Datum zadání bakalářské práce:

20. února 2008

Termín odevzdání bakalářské práce:

5. května 2008

Ve Zlíně dne 20. února 2008


prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan




doc. Ing. Ivan Zelinka, Ph.D.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Předložená bakalářská práce se zabývá problematikou zpracování obrazové informace, konkrétně kompresí nebo expanzí obrazu pomocí waveletové transformace. V praxi se velmi často setkáváme s požadavkem zpracování snímku, jako výsledku a jeho následné aplikaci v praxi.

Přesto že je známo mnoho interpolačních metod, které je možno použít, každá z nich sebou nese určité riziko ztrát užitečné informace. Proto se hledají stále nové metody pro kompresi a expanzi obrazu, které by toto riziko patřičně snížily. Jednou s těchto metod by mohla být waveletová transformace. Aplikace waveletů na teorii signálů a image processing (rozklad obrazu) je jen několik let stará. Ale podíváme-li se zpět do historie matematiky, objevíme několik různých původů či zdrojů waveletové analýzy.

Klíčová slova : komprese, waveletova transformace, Haarův wavelet, kvalita obrazu:

ABSTRACT

This bachelor study is focused on the problem related to picture compression and expansion by using the wavelet transformation. In a Professional field we need very often to work with the picture as a final product and apply it in many different ways.

Despite many know interpolation methods, each of them has a certain amount of risk to lose important information. That is why we are looking for new compression and expansion methods to lower the risk.

Wavelet transformation method could be one of them. Despite this method know as an image processing is just a couple of years old, we can surely trace some of its principles back in the history of mathematic.

Key words: Compression , wavelet transformation, Haaur's wavelet, picture quality

Děkuji vedoucímu své bakalářské práce prof. Ing. Karlu Vlčkovi, Csc. za jeho odborné vedení, poskytování rad a čas, který mi věnoval.

Prohlašuji, že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků, je-li uvolněno na základě licenční smlouvy, budu uveden jako spoluautor.

Ve Zlíně

Podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD	7
I TEORETICKÁ ČÁST	9
1 TEORETICKÝ ROZBOR PROBLEMATIKY ZPRACOVÁNÍ OBRAZU	10
1.1 ZTRÁTOVÁ A BEZZTRÁTOVÁ KOMPRESCE	10
1.2 HAARŮV SYSTÉM	10
1.3 ANALÝZA MULTIROZKLADU	12
1.3.1 Konstrukce multirozkladu pomocí škálové funkce	12
1.4 DEFINICE WAVELETU A JEHO KONSTRUKCE POMOCÍ MULTIROZKLADU	13
1.4.1 Konstrukce waveletů pomocí multirozkladu	14
1.5 VÍCEROZMĚRNÉ WAVELETY	15
1.6 PŘEHLED NEJZNAMĚJŠÍCH WAVELETOVÝCH FUNKCÍ	19
1.6.1 Haarův wavelet	19
1.6.2 Daubechiesovský wavelet	19
1.6.3 Biortogonální wavelety	20
1.6.4 Coifletův wavelet	22
1.6.5 Symlety	23
1.6.6 Morlet	23
2 VYUŽITÍ WAVELETŮ PŘI ZPRACOVÁNÍ DIGITÁLNÍHO OBRAZU	25
2.1 KOMPRESCE OBRAZU	25
2.2 ALGORITMUS VÝPOČTU DISKRÉTNÍ WAVELETOVÉ TRANSFORMACE	25
II PRAKTICKÁ ČÁST	28
3 KVALITA OBRAZU	29
3.1 SUBJEKTIVNÍ HODNOCENÍ KVALITY OBRAZU	29
3.2 OBJEKTIVNÍ HODNOCENÍ KVALITY OBRAZU	29
3.2.1 Histogram obrazu	35
3.2.2 Entropie	36
3.2.3 Normalizovaná dvojrozměrná vzájemná korelace	41
4 VLIV ŠUMU NA ZVĚTŠOVÁNÍ SNÍMKŮ POMOCÍ WAVELETOVÉ TRANSFORMACE	43
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	48
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	49
SEZNAM OBRÁZKŮ	50
SEZNAM TABULEK	52

ÚVOD

Předložená bakalářská práce se zabývá problematikou zpracování obrazové informace. Konkrétně kompresí, nebo expanzí obrazu pomocí waveletové transformace. V technické praxi se velmi často setkáváme s požadavkem zpracování snímku, jako výsledku zkoumání. Nebudeme-li brát v úvahu operace, jako je např. detekování mikrotrhlin v tepelně zpracovaném kovu. Typem zpracování takového obrázku jeho komprese, nebo naopak zvětšení důležitého detailu.

Největší část této práce byla provedena ve třicátých letech a tehdy se vůbec nezdálo, že by spolu tehdejší výsledky nějakým způsobem souvisely. Neobjevovalo se tehdy ani slovo wavelet, ani celková koncepce odpovídající současné teorii waveletů. Teprve dnes víme, že všechna tato práce dnešní teorii waveletů předcházela.

Každý z těchto původních zdrojů zachycuje jiný pohled na věc a specifickou techniku práce odpovídající té které oblasti. Až nyní se můžeme na tyto záležitosti podívat z obecného pohledu zahrnující všechny tyto alternativy. Při odvozování moderní teorie waveletů byly všechny tyto techniky znovu odvozeny současnými matematiky a fyziky jako součást mnohem obecnějších výpočtů. Například Littlewood-Paleyho analýza z roku 1930 a je de facto základem Mallatovy práce o image processing. Aniž by toto tušil, používal Mathias Holschneider Luzinovu techniku z roku 1930 k objasnění fraktálové struktury Reimannovy funkce. Grossmann a Morlet během svého výzkumu znovuobjevili Calderónovu identitu (původně objeven roku 1960), a to o dvacet let později. A Yves Meyer také nebyl první, kdo zkonstruoval regulární dobře lokalizovanou ortogonální waveletovou bázi s algoritmickou strukturou Haarova systému; J.O. Stromberg dokázal totéž o pět let dříve. Všechny tyto již známé výsledky dostaly ovšem díky práci moderních vědců nový význam. Důležitost výzkumu Grossmanna a Kotleta neleží ve znovuobjevení Calderónovy identity, spočívá v uvedení této rovnosti do souvislosti s vyšetřování průběhu nestacionárních signálů.

Moderní teorie waveletů se již v aplikacích objevila ve velkém množství oborů matematiky i fyziky. Má však stále velké pole působnosti a dá se očekávat, že se brzy stane součástí většiny podstatných matematických a fyzikálních metod.

V této práci byl prakticky ověřen přínos Daubechiesovských waveletů, jejichž základem je Haarova báze, pro kompresi obrazu, nebo zvětšování detailů. Původním přínosem práce je

návrh a realizace metody zvětšování nebo zmenšování rozměrů obrazu pomocí waveletové transformace.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 TEORETICKÝ ROZBOR PROBLEMATIKY ZPRACOVÁNÍ OBRAZU

1.1 Ztrátová a bezztrátová komprese

Cílem komprese (komprimace) informace je co největší zestručnění zprávy. Obecně rozeznáváme dva základní typy komprese: bezztrátovou a ztrátovou.

Při bezztrátové kompresi je informace po expanzi (což je opak komprese) informace obnovena ve své původní podobě. Typickým příkladem takové komprese mohou být algoritmy běžně používaných kompresních programů, jako například ZIP, ARJ nebo RAR. Ty fungují tak, že při výskytu více stejných symbolů následujících bezprostředně po sobě se ukládá nějaký uvozovací znak, počet symbolů a typ těchto symbolů. Další možností, která je nejvíce účinná při kompresi umělého obrazu obsahujícího geometrické útvary, není ukládání prováděno do bitmapy, ale identifikují se jednotlivé geometrické objekty. Potom se ukládá typ objektu a jeho pozice v obrazu. Příkladem může být grafický formát Windows Meta File, nebo soubory AutoCad. Při komunikaci se nejčastěji používají nerovnoměrné kódy, jako např. Hoffmanův kód. Ten všem symbolům přiřazuje symboly nové, a to tak, že nejkratší symbol přiřadí původnímu symbolu s největší pravděpodobností.

Ztrátová komprese na rozdíl od bezztrátové neumožňuje obnovení zprávy v původní podobě. Tato metoda je přípustná tehdy, je-li možné dosáhnout současně výrazného zestručnění zprávy při zanedbatelných změnách informačního obsahu. Příkladem ztrátové komprese obrazu jsou formáty JPGE, pro statický snímek a H.261 a MPGE pro video. Nejnovější metodou, která vznikla až počátkem devadesátých let, je metoda komprese obrazu pomocí diskretní waveletové transformace.

1.2 Haarův systém

Haarův systém byl navržen Haarem v roce 1909. V současné době je tento systém základem pro nejnovější waveletové báze a jeho zobecněním vznikly v roce 1985 daubechiesovské wavelety s kompaktním nosičem.

V současné době se jednotlivé definice Haarova systému v jednotlivých detailech liší. Tyto odlišnosti závisí na tom, zda zkoumáme prostor $L^2([0,1])$, nebo $L^2(\mathbb{R})$, a také na tom, který z možných útvarů definice multirozkladu použijeme.

Jako například definice Haarova systému můžeme uvést následující funkci nad prostorem $L^2(\mathbb{R})$:

Definice 1.2.1

Definujeme funkci

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ z intervalu } [0, 1/2) \\ -1 & \text{pro } x \text{ z intervalu } [1/2, 1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (1.1)$$

Pro $n \geq 1$ pak definujeme funkce

$$h_{jk} = 2^{j/2} h(2^j x - k), \text{ kde } j, k \in \mathbb{Z} \quad (1.2)$$

Tyto funkce se nazývají **Haarovým systémem funkcí**.

Index j označuje úroveň výpočtů, tzn. Interval I leží na j -té úrovni jeho dilatační index j .

Nosičem funkce h_{jk} je interval $I_{jk} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. Tyto intervaly mají následující

vlastnosti : buďto je jejich průnik prázdný, nebo jsou obsazeny ostře jeden v druhém. Je-li jeden obsazen jeden v druhém, pak leží celý buďto v jeho pravé, a nebo v levé polorovině

1.3 Analýza multirozkladu

Pro specifikaci pojmu wavelet je nejprve potřeba definovat pojem multirozklad, v anglické, jazyku nazývaná jako multiresolution analysis

Definice 1.3.1

Nechť je dána posloupnost vektorů $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ prostoru $L^2(\mathbb{R})$ takových, že

1. $V_j \subset V_{j+1}$ pro všechna $j \in \mathbb{Z}$
2. $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
3. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
4. $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$
5. $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x+1) \in V_0$

Posloupnost $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ pak nazveme multirozkladem prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

1.3.1 Konstrukce multirozkladu pomocí škálové funkce

Cílem této kapitoly je sestavení multirozkladu škálové funkce $f \in V \subset L^2(\mathbb{R})$. Z prvního bodu definice 1.3.1 vyplývá, že škálové funkce musí být prvkem prostoru V_0 . Jelikož

$V_0 \subset V_1$, je podle bodu 4 funkce $f(x/2)$ a tedy i $\frac{1}{\sqrt{2}}f(x/2)$ prvkem v prostoru V_0 .

Existují takové koeficienty, že

$$\frac{1}{\sqrt{2}}f(x/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k f(x-k) \quad (1.3)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Koeficienty $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ pak nazveme škálovými koeficienty příslušné škálové funkce f .

Touto definicí získáváme zároveň dilatační rovnici, což je jeden z nejdůležitějších vztahů v teorii waveletů :

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k f(x-k) \quad (1.4.)$$

nahradíme – li výraz $x/2$ proměnou x , dostaneme :

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k f(2x-k) \quad (1.5)$$

Vzhledem k ortonormalitě posloupnosti $\{f(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ můžeme psát :

$$\begin{aligned} \|f(x/2)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x/2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(u) du = 2 \\ \|f(x/2)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k f(x-k) \right|^2 dx = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2. \end{aligned}$$

Tímto jsme ukázali ,že pro koeficienty h_k platí :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 = 1. \quad (1.6)$$

Dilatační rovnici (1.4) nyní vynásobíme funkcí $\overline{f(x-1)}$ a integrujeme. Při výpočtu opět využijeme ortonormalitu systému $\{f(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x/2) \overline{f(x-1)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k f(x-k) \overline{f(x-1)} dx = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{-\infty}^{\infty} f(x-k) \overline{f(x-1)} dx = \sqrt{2} h_1.$$

Z tohoto vztahu získáváme vyjádření pro koeficienty h_k :

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x/2) \overline{f(x-k)} dx. \quad (1.7)$$

1.4 Definice waveletu a jeho konstrukce pomocí multirozkladu

Obecná definice funkce, kterou nazýváme wavelet zní :

Definice 1.4.1.

Wavelet je funkce $y(x)$ z prostoru $L^2(\mathbb{R})$ taková , že množina funkcí

$$\{y_{jk}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}} = \left\{ 2^{j/2} y(2^j x - k) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$$

je ortonormální báze prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

1.4.1 Konstrukce waveletů pomocí multirozkladu

Definice 1.4.1 je velmi obecná. Pro její bližší specifikaci použijeme multirozklad, jehož vlastnostmi jsme se zabývali v předchozí kapitole. Naším cílem bude nyní při daném multirozkladu a jeho škálové funkci sestavit wavelet y .

Mějme dán multirozklad $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $V_j \in L^2(\mathbb{R})$ a škálovou funkci $f \in V_0$. Definujme nyní prostor W_0 jako ortogonální doplněk prostoru V_0 ve V_1 , píšeme tedy, že $V_0 \perp W_0$ a

$$V_1 = V_0 \oplus W_0. \quad (1.8)$$

V teorii Fourierovy transformace je zaveden operátor dyadické dilatace

$$\text{jako } J_s f(x) = f(2^s x).$$

Uvědomíme-li si, že $J_j^{-1} = J_{-j}$, pak lze psát $J_1(V_0) = V_1 = V_0 \oplus W_0$ a tedy

$$V_0 = J_{-1}(V_0 \oplus W_0) = J_{-1}(V_0) \oplus J_{-1}(W_0) = V_{-1} \oplus J_{-1}(W_0).$$

Definujme-li prostor W_{-1} jako $W_{-1} = J_{-1}(W_0)$, je potom

$$V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}.$$

Analogicky můžeme definovat prostory $W_j : W_j = J_j(W_0)$ pro všechna $j \in \mathbb{Z}$. Prostor W_j pak podle této úvahy bude vždy ortogonálním doplňkem prostoru V_j ve V_{j+1} , tedy :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (1.9)$$

Z multirozkladu $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ jsme tedy získali posloupnost prostorů $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, jimiž je tvořen celý prostor $L^2(\mathbb{R})$ a přitom každé dva z nich jsou na sebe kolmé. Tato ortonormalita je velmi důležitá, protože nám umožňuje využít tyto prostory ke konstrukci waveletu y . Nyní

totiž stačí nalézt takovou funkci $y = W_0$, aby systém $\{y(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ byl ortonormální bází celého prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Tato funkce y je pak hledaným waveletem příslušným tomuto multirozkladu.

Nyní můžeme pro wavelet y provést analogickou úvahu jako pro škálovou funkci f .

Víme, že wavelet y je prvkem prostoru W_0 . Jelikož je $W_0 \subset V_1$, také $y(x) \in V_1$. Funkce

$y(x/2)$ i funkce $\frac{1}{\sqrt{2}}y(x/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k f(x-k)$ jsou tedy, podle definice 2.3.1, bod 4,

prvkem prostoru V_0 . A jelikož systém $\{f(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální báze ve V_0 , existující koeficienty g_k takové, že:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}y(x/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k f(x-k)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Tyto koeficienty $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ se pak nazývají waveletovými koeficienty příslušné škálové funkci f . Získáváme tudíž rovnici :

$$y(x/2) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k f(x-k), \quad (1.10)$$

respektive rovnici

$$y(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k f(2x-k) \quad (1.11)$$

kteřá je analogická dilatační rovnici a obdobným postupem jako pro škálové koeficienty získáme vztah

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x/2) \overline{f(x-k)} dx \quad (1.12)$$

1.5 Vícerozměrné wavelety

Předchozí kapitoly pojednávaly pouze o jednorozměrných waveletech. Obraz je však po digitalizaci v počítači prezentován dvourozměrným polem obrazových bodů (pixelů) a proto

jsou pro jeho zpracování pomocí waveletové transformace nutné dvojrozměrné wavelety. Obecně je možné konstruovat vícerozměrné wavelety následujícími třemi způsoby :

První možnost je modifikovat předchozí definice pro prostor $L^2(\mathbb{R}^n)$, $d1$ a lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ s vlastními čísly v absolutní hodnotě větší než 1 takové, že $A(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$. Množinou waveletů s dilatační maticí pak nazveme konečnou množinou funkcí $\{Y_r\}_{r=1,2,\dots,s}$ takovou, že systém

$$\left\{ \det A^{1/2} Y(A^j x - k) \right\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}, r = 1, 2, \dots, s \quad (1.13)$$

je ortonormální báze v $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Další metody využívají možnost použít výsledky z jednorozměrného prostoru a převést je do vícerozměrného prostoru pomocí tenzorového součinu. Máme-li tedy n funkcí jedné proměnné $f(x), j = 1, 2, \dots, n$, pak definujeme tenzorový součin těchto funkcí.

$$(f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^n)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\bigotimes_{j=1}^n f^j \right)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n f^j(x_j) \quad (1.14)$$

Máme-li n uzavřených podprostorů prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$, je pak podprostor

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n = \bigotimes_{j=1}^n x_j \quad (1.15)$$

definován jako uzavřený lineární obal $L^2(\mathbb{R}^n)$ všech funkcí tvaru $f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^n$, kde $f^j \in X_j$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, n$. Z definice tenzorového součinu je pak možné ověřit, jsou – li dány systémy funkcí $\{f_s^j\}_{s \in A_j}$ z prostoru X_j , které jsou v prostoru X_j vždy ortonormální, pak systém

$$\left(\bigotimes_{j=1}^n f_{s_j}^j \right)_{(s_1, s_2, \dots, s_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} \quad (1.16)$$

je ortonormální bázi v $\bigotimes_{j=1}^n X_j$. Také platí, že $\bigotimes_{j=1}^n L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Z tohoto postupu vychází druhá, v praxi velmi často používaná, možnost pro vytvoření báze v $L^2(\mathbb{R}^2)$. Nyní je tedy celkem přirozené vzít waveletovou bázi jednorozměrného prostoru $L^2(\mathbb{R})$ a

aplikovat na ni výše uvedené úvahy. Získáme pak následující tvrzení:

Věta 1.5.1.

Nechť $y^r, r = 1, 2, \dots, n$ je n waveletů v $L^2(\mathbb{R})$ takových, že pro každé $r = 1, 2, \dots, n$ tvoří množina $\{y_{jk}\} = \left\{ 2^{j/2} y(2^j x - k) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ ortonormální bázi v $L^2(\mathbb{R})$. Definujme dále funkci

y jako

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{r=1}^n y^r(x_r)$$

a označujeme

$$y_{j_1, k_1, j_2, k_2, \dots, j_n, k_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2^{\frac{j_1 + j_2 + \dots + j_n}{2}} y(2^{j_1} x_1 - k_1, 2^{j_2} x_2 - k_2, \dots, 2^{j_n} x_n - k_n)$$

Potom systém

$$\begin{aligned} & \left\{ y_{j_1, k_1, j_2, k_2, \dots, j_n, k_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\} \\ &= \left\{ 2^{\frac{j_1 + j_2 + \dots + j_n}{2}} y^1(2^{j_1} x_1 - k_1) y^2(2^{j_2} x_2 - k_2) \dots y^n(2^{j_n} x_n - k_n) \right\} \end{aligned}$$

pro všechna $j_1, j_2, \dots, j_n \in \mathbb{Z}, k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Třetí možnost vychází přímo z definice multirozkladu. Vezměme si n multirozkladů definovaných na $L^2(\mathbb{R})$ podle definice 2.3.1. a utvoříme z nich nový multirozklad prostoru

$L^2(\mathbb{R}^2)$. Mějme tedy dány dva různé multirozklady prostoru

$L^2(\mathbb{R}) \{V_j^i\}_{j \in \mathbb{Z}}, \dots, V_{-1}^i \subset V_0^i \subset V_1^i, \dots, i = 1, 2$ a k nim příslušné škálové funkce f_1, f_2 a

wavelety y^1, y^2 . Sestrojíme systém množin $\{F_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tak, že položíme

$$F_j = V_j^1 \otimes V_j^2, \quad (1.17)$$

Pro množiny F_j pak platí

$$\dots \subset F_{-1} \subset F_0 \subset F_1 \subset \dots, \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} F_j} = L^2(\mathbb{R}^2) \text{ a } \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} F_j = \{0\}. \quad (1.18)$$

Systém $\{f_1(x-k)f_2(y-l)\}_{k,l \in \mathbb{Z}}$ je pak úplatná ortonormální báze prostoru F_0 a zřejmě platí, že

$$f(x, y) \in F_0 \Leftrightarrow f(2^j x, 2^j y) \in F_j, \quad f(x, y) \in F_0 \Leftrightarrow f(x-k, y-l) \in F_0.$$

Systém množin $\{F_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je tedy splňuje definici 1.3.1 přenesenou do více rozměrů a můžeme tedy říci, že systém $\{F_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je multirozkladem prostoru $L^2(\mathbb{R}^2)$. Stejně jako

v jednorozměrném případě nyní zavedeme prostory W_j^i - pišme $V_{j+1}^i = V_j^i \oplus W_j^i, i = 1, 2$.

Pak

$$\begin{aligned} F_1 &= V_1^1 \otimes V_1^2 = (V_j^1 \oplus W_j^1) \otimes (V_j^2 \oplus W_j^2) \\ &= (V_0^1 \otimes V_0^1) \oplus (V_0^1 \otimes W_0^2) \oplus (W_0^1 \otimes V_0^2) \oplus (W_0^1 \otimes W_0^2) \\ &= F_0 \oplus (V_0^1 \otimes W_0^2) \oplus (W_0^1 \otimes V_0^2) \oplus (W_0^1 \otimes W_0^2). \end{aligned}$$

Z tohoto vzorce je patrné, že systém $\{f_1(x-k)y_2(y-l)\}_{k,l \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální bází prostoru $V_0^1 \otimes W_0^2$, systém $\{y_1(x-k)f_2(y-l)\}_{k,l \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální bází prostoru $W_0^1 \otimes V_0^2$ a systém $\{y_1(x-k)y_2(y-l)\}_{k,l \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální bází prostoru $W_0^1 \otimes W_0^2$. Sestrojíme tedy tři funkce f_i tak, že položíme

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= y_1 \otimes y_2 = y_1(x-k)y_2(y-l), \\ f_2(x, y) &= y_1 \otimes f_2 = y_1(x-k)f_2(y-l), \\ f_3(x, y) &= f_1 \otimes y_2 = f_1(x-k)y_2(y-l). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Pak platí, že systém $\{f_i(2^j x - k, 2^j y - l)\}_{j,k,l \in \mathbb{Z}} i = 1, 2, 3$, tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2(\mathbb{R}^2)$. Druhá a třetí možnost konstrukce vícerozměrných waveletových bází uvedené v této kapitole jsou v praxi používané nejčastěji.

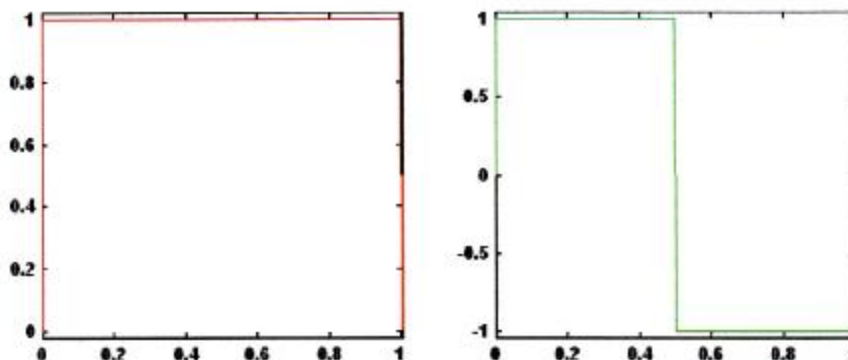
1.6 Přehled nejznámějších waveletových funkcí

1.6.1 Haarův wavelet

První a nejjednodušší waveletová funkce je Haarův wavelet. Je to nespojitá funkce, podobná skokové funkci. Představuje stejnou funkci jako Daubechies – wavelet 1. řádu.

$$y(x) = 1, x \in \langle 0, 0.5 \rangle$$
$$y(x) = -1, x \in \langle 0.5, 1 \rangle$$
$$y(x) = 0, x \notin \langle 0, 1 \rangle$$

$$f(x) = 1, x \in \langle 0, 1 \rangle$$
$$f(x) = 0, x \notin \langle 0, 1 \rangle$$

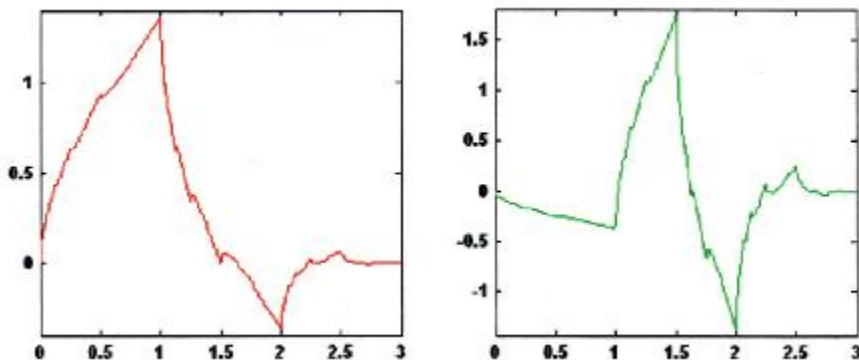


Obr. 1.1: Škálová a Waveletová funkce Haarova waveletu

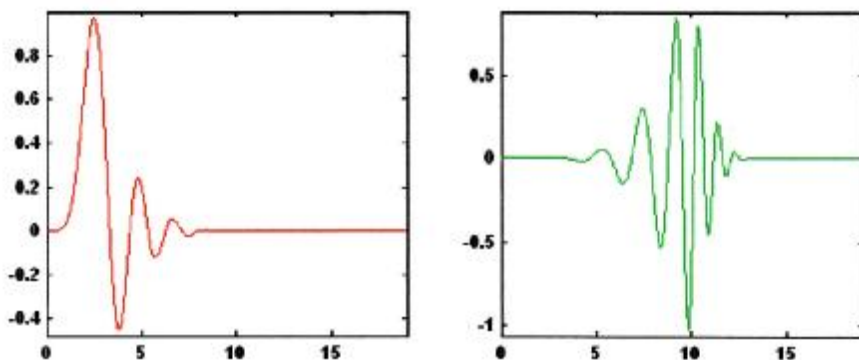
1.6.2 Daubechiesovský wavelet

Daubechiesovská waveletová báze byla pojmenována podle objevitelky Ingrid Daubechies. Daubechiesovské wavelety jsou ortonormální, což velmi zjednodušuje využití diskrétní waveletové transformace v praxi. Tyto wavelety nemají explicitní vyjádření. Výjimkou je pouze Daubechiesovský wavelet 1. řádu, který je stejný, jako Haarův wavelet. Většina

Daubechieovských waveletů není symetrická, a u některých z nich je tato nesymetrie velmi výrazná. Kvalita aproximace se zvyšuje s rostoucím řádem Daubechieovského waveletu.



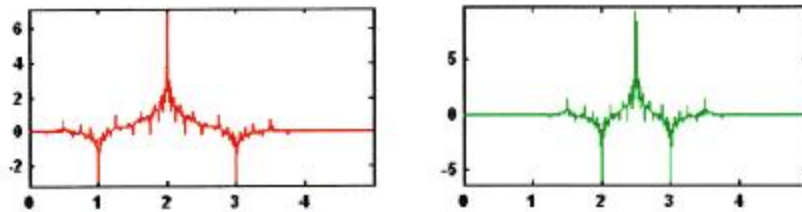
*Obr. 1.2: Škálová a Waveletová funkce Daubechieovského waveletu
řádu 2.*



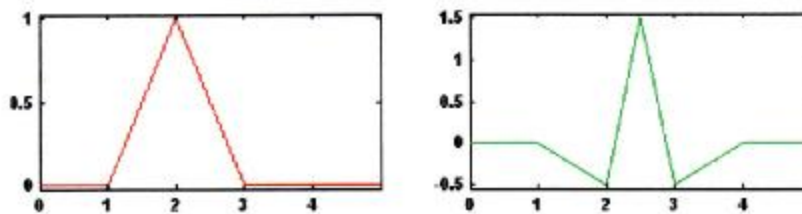
*Obr. 1.3: Škálová a Waveletová funkce Daubechieovského waveletu
řádu 10.*

1.6.3 Biortogonální wavelety

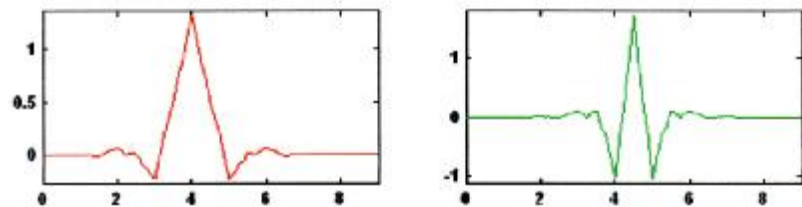
Tato rodina waveletů vykazuje vlastnosti lineární fáze, která je potřebná pro rekonstrukci signálů i obrazu. Použitím dvou waveletů, jednoho pro rozklad (vlevo) a druhého pro rekonstrukci (vpravo), místo jednoho, získáme zajímavé vlastnosti. Nejčastěji se používají při filtraci dílčích pásem signálů, kde požadavek na symetrii a přenosnou rekonstrukci neumožňuje použít stejný FIR filtr na rozklad i rekonstrukci.



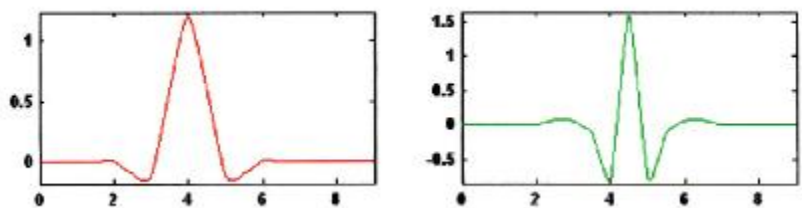
Obr. 1.4: Škálová a Waveletová funkce biortogonálního waveletu řádu 2.2 používaná pro rozklad



Obr. 1.5: Škálová a Waveletová funkce biortogonálního waveletu řádu 2.2 používaná pro rekonstrukci



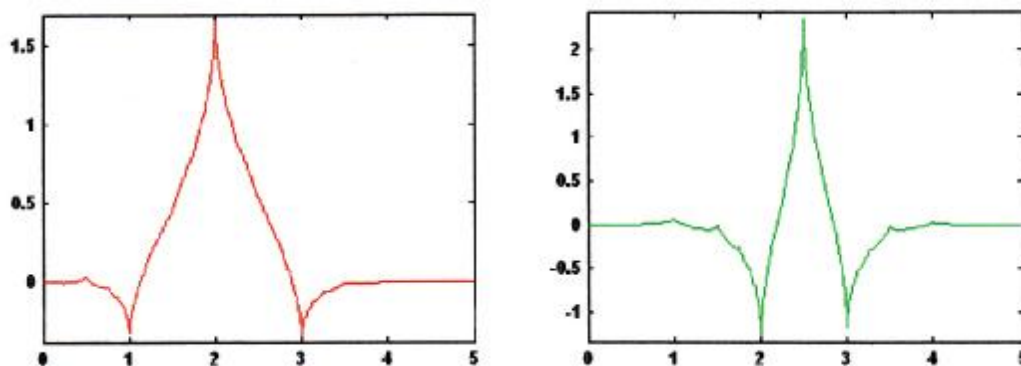
Obr. 1.6: Škálová a Waveletová funkce biortogonálního waveletu řádu 4.4. používaná pro rozklad



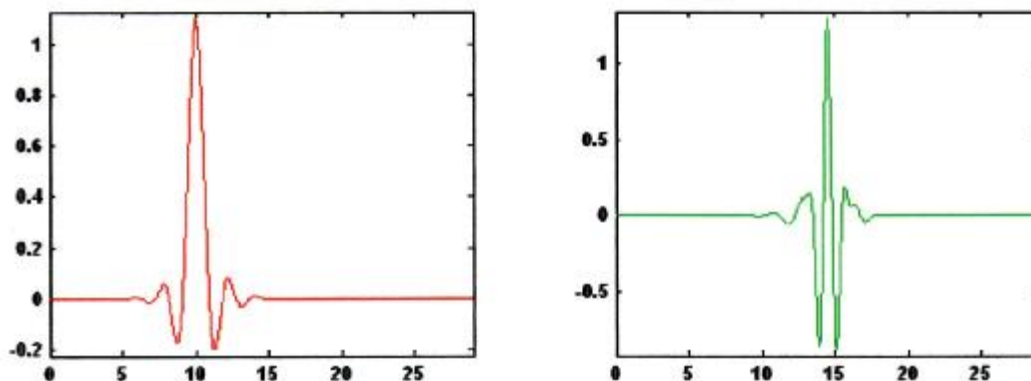
Obr. 1.7: Škálová a Waveletová funkce biortogonálního waveletu řádu 4.4. používaná pro rekonstrukci

1.6.4 Coifletův wavelet

Tento wavelet sestavila I. Daubechies na žádost R. Coifmana. Waveletová funkce ψ má moment $2N$ roven nule škálová ϕ má $2N-1$ momentů rovných nule. Coifletovy wavelety jsou mnohem symetričtější než daubechieovské wavelety. Z hlediska délky je coifletův wavelet N - řádu srovnatelný s daubechieovským waveletem $3N$ - řádu, a z hlediska momentu útlumu waveletové funkce ψ s daubechieovským waveletem $2N$ - řádu.



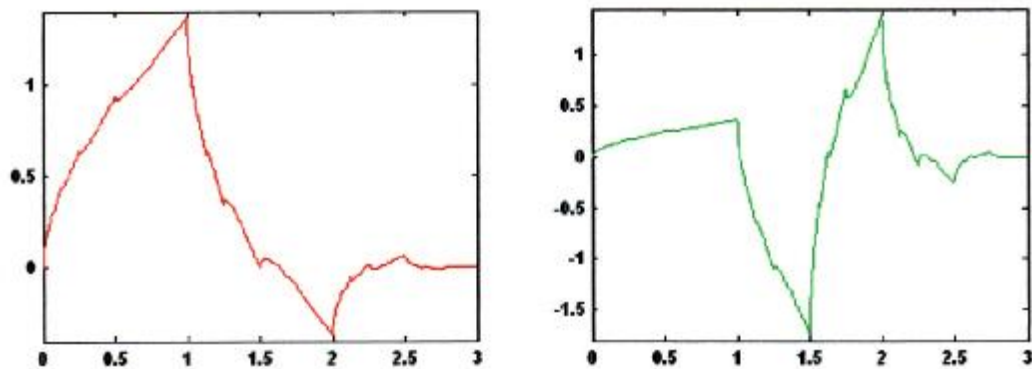
Obr. 1.8: Škálová a Waveletová funkce coifletova waveletu řádu 1.



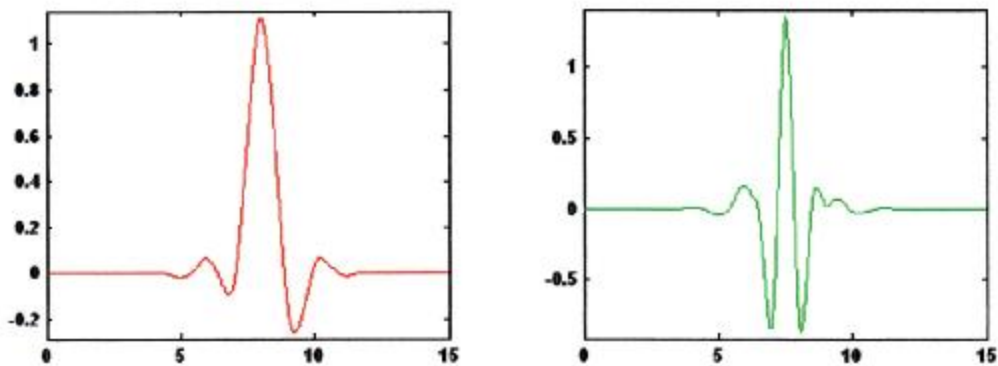
Obr. 1.9: Škálová a Waveletová funkce coifletova waveletu řádu 5.

1.6.5 Symlety

Symlety jsou téměř symetrické wavelety, které I. Daubechies navrhla jako modifikaci daubechieovské rodiny waveletů. Vlastnosti těchto dvou rodin waveletů jsou velmi podobné.



Obr. 1.10: Škálová a waveletová funkce symletu řádu 2.



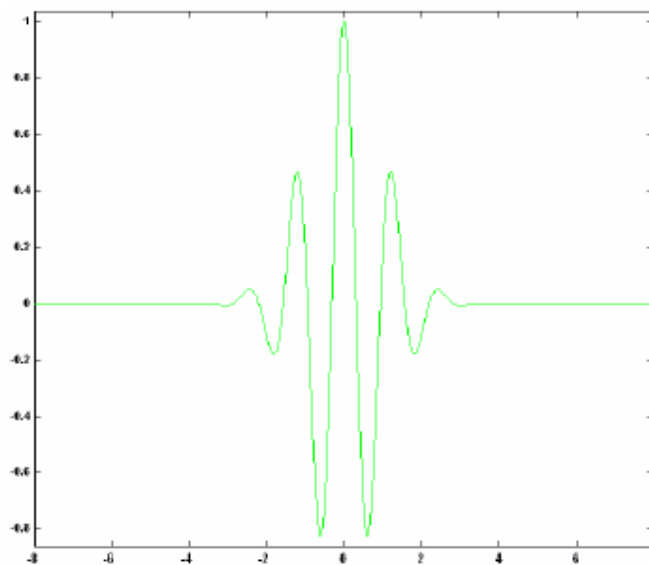
Obr. 1.11: Škálová a Waveletová funkce symletu řádu 8.

1.6.6 Morlet

Tento wavelet nemá žádnou škálovou funkci, ale je explicitní.

$$y(x) = Ce^{-x/2} \cos(5x)$$

Konstanta C je použita pro normalizaci kvůli rekonstrukci.



Obr. 1.12: Škálová funkce morletu

2 VYUŽITÍ WAVELETŮ PŘI ZPRACOVÁNÍ DIGITÁLNÍHO OBRAZU

2.1 Komprese obrazu

Chceme-li waveletovou transformaci použít pro kompresi digitálního obrazu, musíme se na tento obraz dívat jako na matici jednotlivých bodů (pixelů). Hodnota každého prvku matice pak udává jas odpovídajícího bodu obrazu. V případě barevného obrazu se každý jeho bod skládá ze tří jasových hodnot, červené (R- red), zelené (G-green) a modré (B-blue). Každá z těchto složek může nabývat hodnot 0 až 255, přičemž hodnota 255 je maximální jas této barevné složky a hodnota 0 znamená, že se tato barevná složka na výsledné barvě nepodílí. Dále každý bod obsahuje ještě jednu hodnotu, která určuje výběr barevné palety. Tato hodnota je pro celý obraz konstantní, proto se jí nemusíme dále zabývat. Obraz tedy rozdělíme na tři matice, z nichž každá bude obsahovat jasové koeficienty jedné barevné složky.

Izolujeme-li jednotlivé RGB složky obrazu, získáváme tři samostatné matice jasových hodnot. Pro každou z nich provedeme zvlášť diskrétní waveletovou transformaci a potom je opět složíme do jedné matice. Tím získáme komprimovaný snímek.

2.2 Algoritmus výpočtu diskrétní waveletové transformace

Koeficienty h_k a g_k vypočítané podle rovnic (1.7.) a (1.14.) jsou publikovány v literatuře pro 2.....20 nenulových hodnot a není potřeba je znovu odvozovat. Nyní uvažujeme vstupní vektor $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$, kde $N = 2^k, k \in \mathbb{Z}$. Přejít na 1. nižší hladinu waveletovou transformací je nyní definován :

$$y_n^1 = (y f_0) = \sum_{l=1}^{N-1} y_l h(l - 2n), l = 0, 1, \dots, N - 1, n = 0, 1, \dots, N / 2 - 1 \quad (2.1)$$

$$d_n^l = (yY_0) = \sum_{l=1}^{N-1} y_l g(l-2n), \quad l = 0, 1, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, \dots, N/2-1 \quad (2.2)$$

kde y_n^l jsou škálové a d_n^l waveletové koeficienty. Toto se dá zapsat maticově :

$$\begin{pmatrix} y^l \\ d^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ G \end{pmatrix} y^T \quad (2.3)$$

kde např. pro 4 koeficienty

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & K & K & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & K & 0 \\ 0 & 0 & K & M & M & M & K & 0 \\ 0 & 0 & K & K & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_3 & g_4 & 0 & K & K & 0 & g_0 & g_1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$G = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & K & K & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & K & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & M & M & M & K & 0 \\ 0 & 0 & K & K & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_3 & g_4 & 0 & K & K & 0 & g_0 & g_1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

kde:

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

$$g_0 = h_3, g_1 = -h_2, g_2 = h_1, g_3 = -h_0$$

Zpětná konstrukce původního vektoru y pomocí vektorů y^l a d^l a matic H a G se provede :

$$y = \begin{pmatrix} H \\ G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y^l \\ d^l \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Vzhledem k tomu, že reálné matice H , G jsou ortogonální, můžeme psát :

$$y = \begin{pmatrix} H \\ G \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y^1 \\ d^1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

S vektorem y^1 můžeme uvedený postup opakovat, čímž dostaneme vektor $\begin{pmatrix} y^2 \\ d^2 \end{pmatrix}$.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

3 KVALITA OBRAZU

Vysoká kvalita digitálního zpracování a přenosu obrazové informace je podmíněna rozvojem vhodných metod pro kontrolu a měření parametrů digitalizované obrazové informace. Jejich úkolem je kvantitativní zhodnocení vznikajících obrazových degradací. Používané metody můžeme všeobecně rozdělit na objektivní a subjektivní. Objektivní metody zajišťují přístrojové zhodnocení vybraných parametrů digitalizovaného signálu. Subjektivní metody využívají přímo příjemce obrazové informace a slouží k subjektivnímu zhodnocení celkové kvality digitalizovaného obrazu, případně k zjišťování hodnot dílčích kvalitativních parametrů na základě vizuálního zhodnocení jejich projevu v obraze.

Základním rozdílem při posuzování kvality zpracování obrazu v běžných aplikacích (např. digitální fotografie, nebo film) a v technických aplikacích je kritérium věrnosti. Zatímco při úpravách běžné digitální fotografie se klade hlavně na zvýšení estetického dojmu obrazu jako celku, je možné měnit kontrast jednotlivých barev nezávisle na sobě, případně v některých částech obrazu zaměnit jednu barvu za jinou, nebo vyhlazovat rastr obrazu i za cenu rozmazání některých detailů, při zpracování obrazu v technických aplikacích toto není možné. Zde se klade důraz na zachování největší možné shodnosti zpracovaného snímku z originálem. Není možné připustit ztrátu drobných detailů obrazu, protože právě tyto detaily mohou nést pro techniky nejdůležitější informace. Tento požadavek je potřeba vzít v úvahu hlavně při ztrátových kompresích.

3.1 Subjektivní hodnocení kvality obrazu

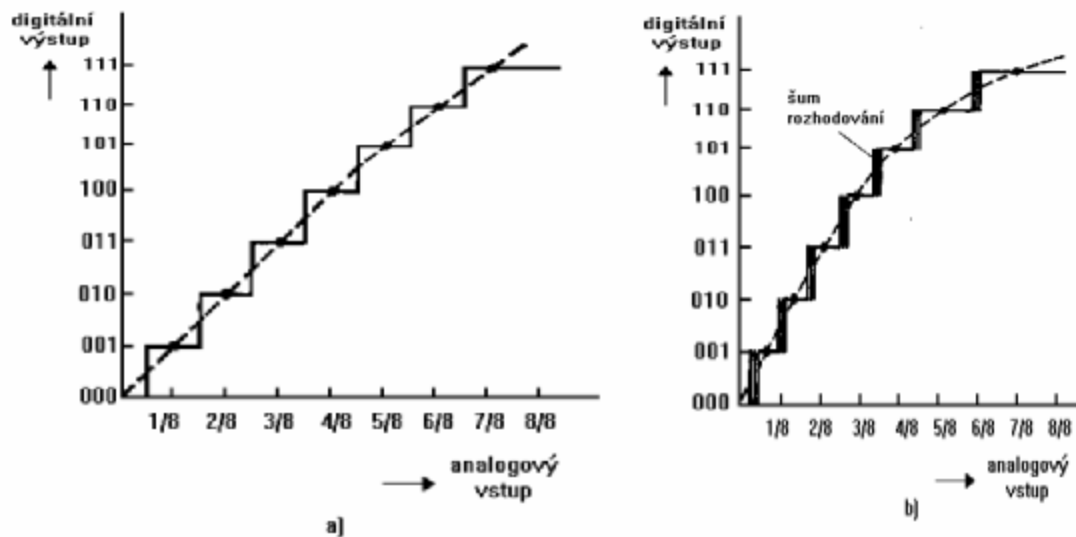
Tato metoda hodnocení kvality obrazu má zásadní význam pro technik. Pouze technik – specialista dokáže posoudit, jestli ve snímku zůstaly po zpracování všechny důležité informace, nebo jestli byly dokonce zvýrazněny. Tuto metodu pro posouzení kvality obrazu není možné zahrnout do nějakého algoritmu, proto se jí dále nebudu zabývat.

3.2 Objektivní hodnocení kvality obrazu

Objektivní metody hodnocení kvality obrazu je možné vyjádřit matematickou funkcí, kterou je možné použít jako základ numerického algoritmu. Jako vstupní data takového algoritmu se obvykle používají data získané měřením na reálné soustavě – algoritmu pro zpracování

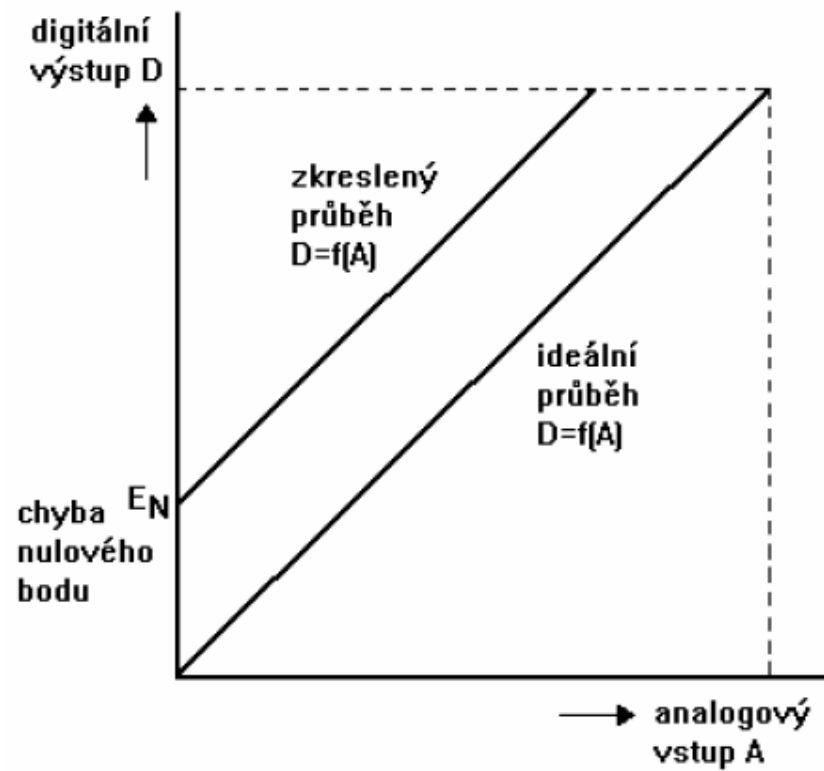
obrazu. Skutečnost, že monitorování digitálně zpracované obrazové informace je nezbytně spojena s analogově digitálním převodem, nám umožňuje rozdělit tuto metodu hodnocení kvality obrazu do dvou kategorií : hodnocení kvality analogově digitálního převodu a hodnocení kvality samotného číslicového zpracování.

Základní vlastnosti mezi analogovou a digitální signálovou oblastí charakterizují :



Obr. 3.1: Znárodnění ideální (a) a skutečné (b) převodní charakteristiky

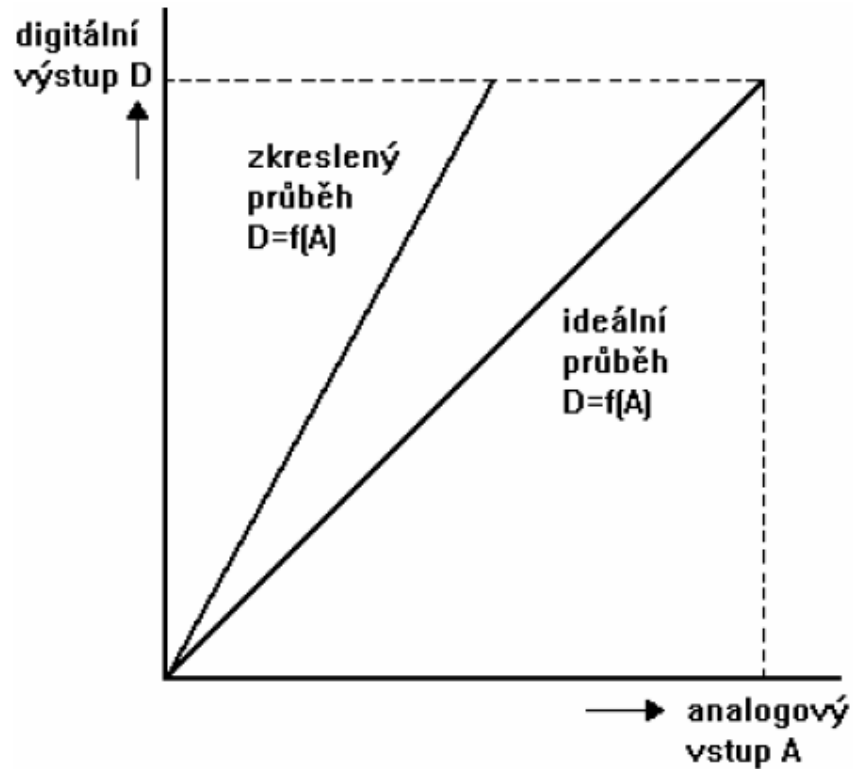
- Rozlišovací schopnost vyjadřovaná počtem bitů kódovaného signálu
- Převodní charakteristika vyjadřující souvislost výstupního a vstupního signálu v digitálním systému. Vyjádření ideální a skutečné převodní charakteristiky zkršené nelinearitou a šumem rozhodování je znázorněno v obr. 3.1.
- Absolutní přesnost analogově digitálního přenosu vyjadřovaná odchylkou reálné převodní charakteristiky od ideální charakteristiky



Obr. 3.2: Znáornění chyby nulového bodu

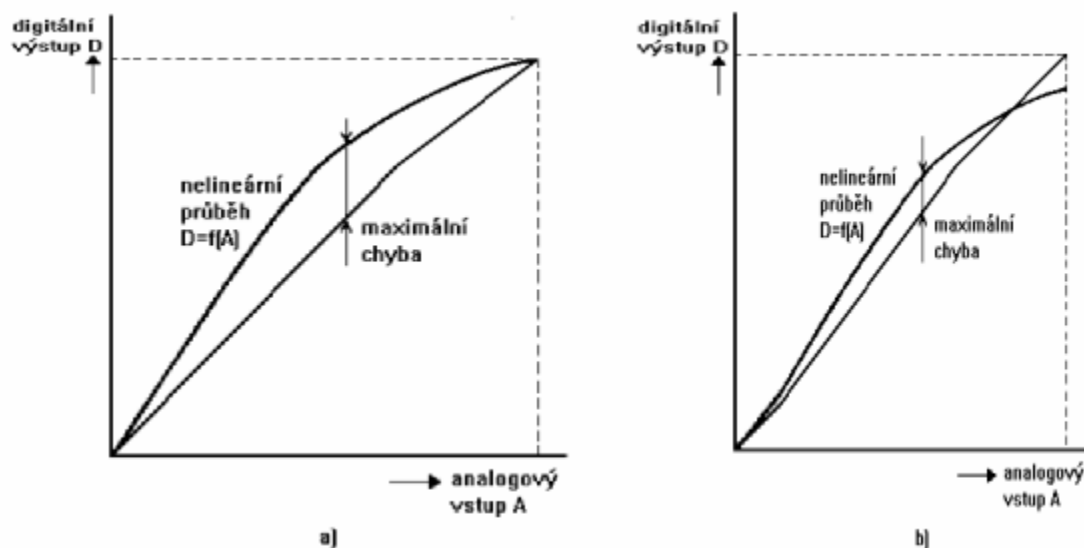
převodní charakteristiky

- Chyba nulového bodu udávající odchylku reálné a ideální převodní charakteristiky v nulovém bodě (obr.3.2.)



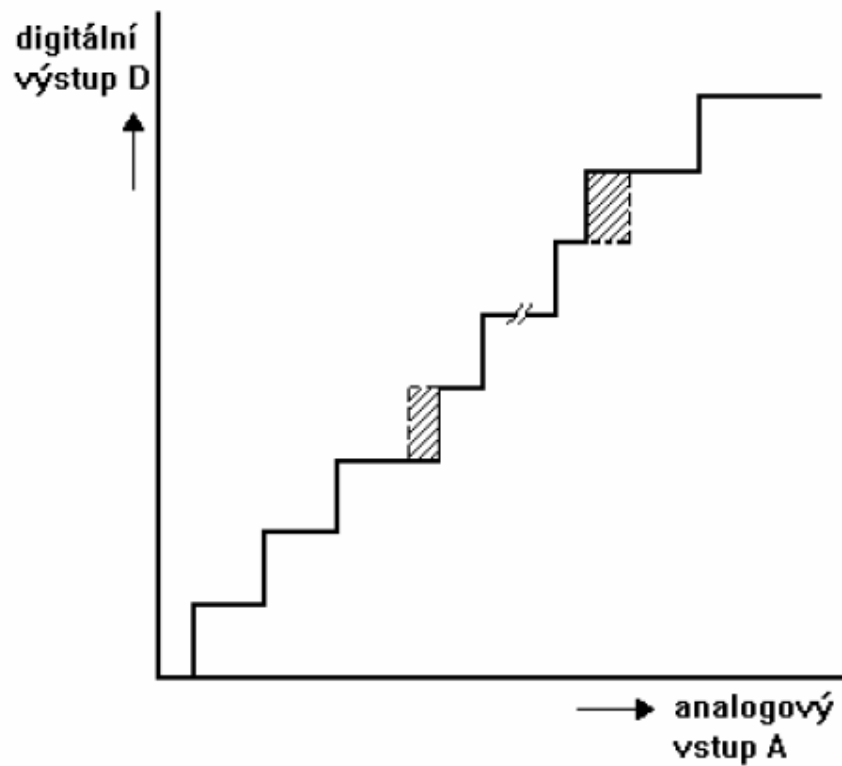
Obr. 3.3: Vliv rozdílného zisku na průběh
převodní charakteristiky

- Chyba zisku vznikající odchylkou strmostí reálné a ideální převodní charakteristiky (obr. 3.3.). Chyba zisku způsobuje změnu měřítka výstupního signálu. Při nelineární převodní charakteristice je možno využít změny zisku ke snížení max. chyby (obr. 3.4.)



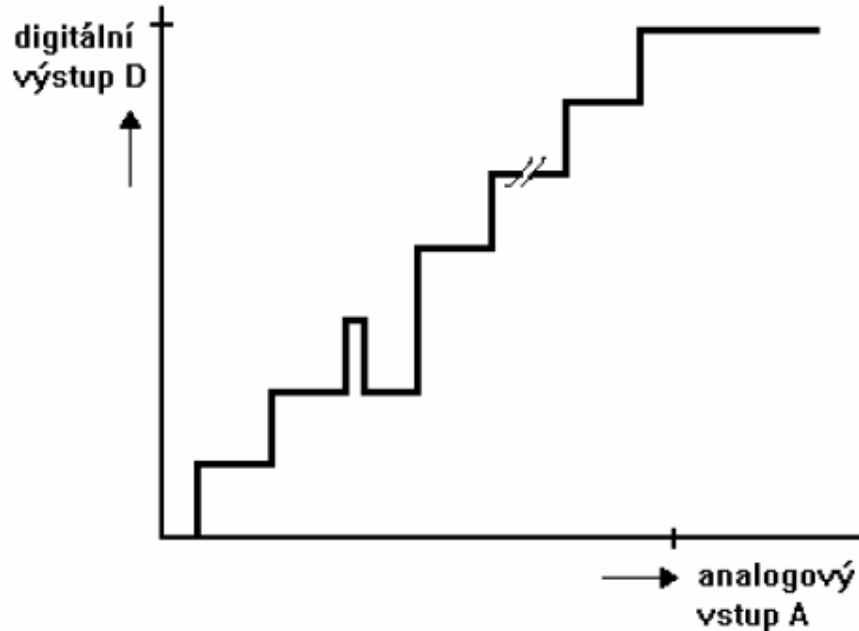
Obr. 3.4: Snížení maximální odchylky skutečné a ideální převodní charakteristiky
úpravou zisku a) bez úpravy, b) po úpravě

- Nelinearita udávající maximální odchylku skutečné převodní charakteristiky od ideální přímkové charakteristiky proložené koncovými body reálné charakteristiky.
- Diferenciální nelinearita vyjadřuje podíl dvou následujících stupňů reálné převodní charakteristiky (viz obr.3.5) .Je způsobena odchylkou rozsahu změn vstupního signálu od jmenovitého rozsahu pro vyvolání změny výstupu o 1 LSB.



Obr. 3.5: Znáznornění diferenciální nelinearity převodní charakteristiky

- Monotónnost převodu vyjadřuje vlastnost, že převodní charakteristika v celém dynamickém rozsahu vzrůstá (klesá). Monotónnost převodu vyžaduje, aby byl následující stupeň převodu menší (větší) nebo alespoň stejně velký jako předcházejí stupeň (viz obr .3.6)



Obr. 3.6: Příklad nemonótonní převodové charakteristiky

Vzhledem k tomu, že se tato práce zabývá zpracováním již digitalizovaného obrazu, je zde problematika analogově digitálního převodu uvedena pouze zběžně pro úplnost.

3.2.1 Histogram obrazu

Histogram H je vektor (v programovacích jazycích většinou implementovaný jako pole nebo lineární seznam) absolutních četností jednotlivých jasových hodnot zastoupených v rastrovém obrazu. Hodnota $H(i)$ histogramu H určuje, kolik pixelů v obrazu má jasovou hodnotu i . Pokud nesly pixely původního rastrového obrazu pouze jasovou složku (luminance), je histogram tohoto obrazu jednorozměrný vektor. V případě, že pixely obsahují hodnoty barvových složek RGB (ale i HSV, HLS apod), je histogram n -rozměrný vektor, kde n je počet barevných složek.

Pokud máme uvažovat pouze jednorozměrný histogram, který je vytvořen nad monochromatickým rastrovým obrazem, platí vztah .

$$\sum_{i=1}^{\max} H(i) = m \cdot n$$

kde m je počet sloupců a n je počet řádku v obrazu

Histogram je však pouze statickou veličinou, která charakterizuje pravděpodobnost výskytu i -té složky v rastrovém obrazu. Ostatní charakteristiky obrazu, například informace o plošném rozložení barev, nejsou v histogramu zahrnuty. Proto mohou mít dva naprosto rozdílné obrazy stejné histogramy. Přesto je možné tuto metodu srovnání dvou snímků použít i v kombinaci se subjektivním zhodnocení podobnosti. Pokud jsou dva snímky podobné na základě vizuálního zhodnocení, můžeme míru této podobnosti vyjádřit pomocí rozdílu jejich histogramů.

Při zpracování obrazu se také používá takzvaný kumulativní histogram, který lze z normálního histogramu vypočítat podle vztahu.

$$H_k(p) = \sum_i^p H(i)$$

Každá p -tá položka je v kumulativní histogramu má hodnotu rovnou součtu hodnot všech položek normálního histogramu, které mají index menší nebo roven p .

3.2.2 Entropie

Užitečnou metodou pro porovnání dvou snímků může být výpočet vzájemné informace mezi těmito snímky.

Požítím tohoto konceptu bude srovnání provedeno pomocí množství informace v kombinovaném obraze, tzn. Měřítkem bude měření informace. Nejčastěji používaným způsobem měření signálu a při zpracování obrazu je měření Shannon-Wienerovy entropie H . H je průměrná informace prezentovaná množinou n symbolů, jejichž pravděpodobnost je

p_1, p_2, \dots, p_n . Tato formulace je odvozena ze tří podmínek, že neurčitost v komunikačním kanále je splněna. Jsou to tyto :

- Funkce je kontinuální pro p_1 .
- Pokud se všechna p_i rovnají $\frac{1}{n}$, kde n je počet symbolů, pak H monotónně roste s n .
- Pokud je výběr přerušen uvnitř probíhajícího výběru, pak originální hodnota H je váhovým součtem jednotlivých prvků H . Tj. :

$$H(p_1, p_2, p) = H(p_1, p_2 + p_3) + (p_2 + p_3) H \left| \frac{(p_2 p_3)}{(p_2 + p_3 p_2 + p_3)} \right|$$

Shannon prokázal, že vzorec $H = -\sum p_i \log p_i$ je funkční pouze pokud platí tyto tři podmínky. Entropie bude mít hodnotu pokud mají všechny symboly stejnou pravděpodobnost, a minimální hodnotu, pokud pravděpodobnost jednoho symbolu bude rovna 1, s tudíž pravděpodobnost všech ostatních bude nulová. Důležité pozorování provedené Shannonem je takové, že změna v datech, které inklinují k vyrovnané pravděpodobnosti symbolů, zvažuje entropii. Pro obraz entropie obvykle vypočítává z histogramu intenzit, ve kterém jsou tyto pravděpodobnosti zaznamenány. Mají-li tyto body v obraze stejnou intenzitu, obsahuje histogram pouze jeden nenulový element s pravděpodobností 1. Entropie takového obrazu je pak $H = -1 \log 1 = 0$. Pokud se do takového „stále stejného“ obrazu dostane šum, objeví se v histogramu další nenulové hodnoty. Toto přidání šumu vede tedy k rozdělení pravděpodobností a tedy ke zvýšení entropie. Vztah mezi entropií a šumem je důležitý. Jeden závěr je takový, že interpolace obrazu může tento obraz vyhladit čímž zredukuje šum a „vyostří“ histogram. Toto „vyostření“ histogramu snižuje entropii.

Aplikaci entropie při porovnávání dvou snímků je výpočet entropie rozdílu těchto snímků. Pokud dva stejné snímky od sebe odečteme, dostaneme uniformní obraz, který má nulovou entropii. Rozdíl dvou snímků, které se liší šumem bude mít entropii vyšší.

Při porovnávání snímků máme dva snímky A a B . Máme tedy dvě hodnoty pro každý pixel pro odhad transformace t . Vzájemná entropie měří množství informace, kterou máme ve dvou spojených obrazech. Pokud jsou A a B úplně rozdílné, pak vzájemná entropie bude

součtem entropií jednotlivých snímků. Méně rozdílné snímky budou mít vzájemnou entropii menší, než součet jednotlivých entropií.

$$H(A, B) \leq H(A) + H(B)$$

Koncept vzájemné entropie můžeme názorně předvést na vzájemném histogramu vypočítaném ze snímků A a B . Pro všechny překrývající se pixely vykreslíme intenzitu pixelu ve snímku A zároveň s intenzitou pixelu ve snímku B . Vzájemný histogram pak normalizujeme vydělením celkovým počtem pixelů, a díváme se na něj jako na hustotu pravděpodobnosti snímků A a B (PDF).

Počet prvků v PDF může být také dán rozsahem hodnot intenzity ve dvou snímcích. Popsané metody srovnání obrazu vyjadřují, aby oba snímky měly stejné rozměry. Vzhledem k tomu, že při výpočtu vzájemné entropie vycházíme ze vzájemného histogramu, a ten se vytváří z překrývajících se pixelů, je jasné v případě, že chceme porovnat zvětšený snímek s originálem, není možné tuto metodu jednoduše aplikovat. Jednou z možností, jak provést srovnání zvětšeného snímku s originálem je porovnat jejich entropie. Vyjdeme – li z definice, že entropie udává celkové množství informace v obraze, pak v ideálním případě by entropie zvětšeného snímku měla být stejná, jako entropie originálu.

Pro techniky je v mnoha situacích jediné praktické hledisko pro srovnání jednotlivých snímků vizuální posouzení. Z toho je potřeba vycházet, pokud hledáme vhodný algoritmus pro srovnávání zvětšeného snímku s originálem. Všimněme si, že při porovnání entropií dojdeme k závěru, že nejvhodnější metoda pro zvětšení originálu je metoda „Pixel resize“ (tedy prosté zvýšení počtu obrazových bodů), přesto, že při vizuálním porovnání výsledku této metody s originálem zjistíme, že výsledný snímek je rastrován, ztrácí na přehlednosti a při zvětšení je už naprosto nepoužitelný.

Jednou z možností, jak zohlednit toto vizuální posouzení je použití dvou snímků, nichž jeden je získán s větším rozlišením. Na snímek s menším rozlišením aplikujeme jednotlivé metody pro zvětšování obrazu a pro posouzení kvality výsledků, získaných pomocí těchto metod. Nebudeme se porovnávat s originálem, na který jsme tyto metody aplikovali, ale porovnáme je s tímž snímkem, který jsme získali s větším rozlišením. Pro toto srovnání pak můžeme využít například metodu výpočtu rozdílu těchto snímků.

Při využití entropie při porovnání dvou snímků, které mají rozdílnou velikost, není možné použít metodu vzájemné entropie, protože tato metoda vyžaduje, aby oba porovnané

snímky měly stejnou velikost. Přesto jsem se pokusil srovnávací metodou založenou na principu výpočtu entropie vytvořit. Definujeme entropii $H(A+B)$ jako entropii složených snímku A a B . Budou – li snímky A a B identické, pak při prostém přidání snímku B k snímku A nezvýšíme velikost informace a bude tedy platit: $H(A) = H(A+B)$

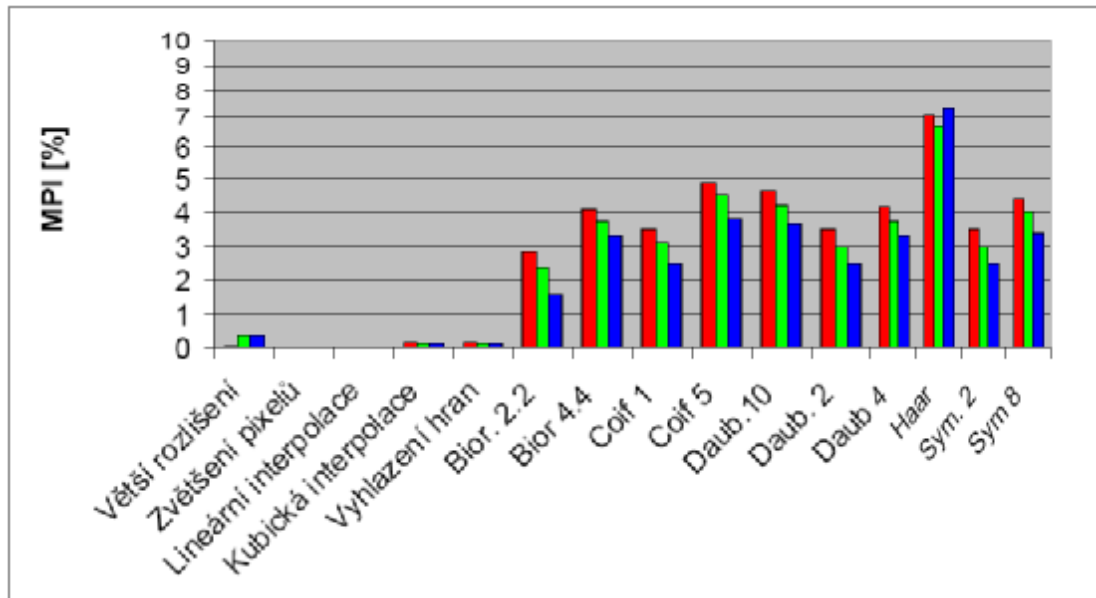
.Pak můžeme definovat množství přidané informace MPI jako rozdíl

$$MPI = H(A+B) - H(A), \text{ nebo relativní změnu informace}$$

$$MPI(\%) = |H(A+B) - H(A)| / H(A) * 100.$$

Jméno	Řád metody	MPI R	MPI G	MPI B	MPI R %	MPI G %	MPI B %
Větší rozlišení		0,000869	0,007378	0,006086	0,048028	0,384022	0,335978
Zvětšení pixelů		0	0	0	0	0	0
Lineární interpolace		0	0	0	0	0	0
Kubická interpolace		0,003494	0,002499	0,001899	0,193091	0,130068	0,104811
Kubická interp. s vyhlazením hran		0,003494	0,002499	0,001899	0,193091	0,130068	0,104811
Biorťogonální wavelet	2.2	0,051349	0,045827	0,029266	2,83799	2,385087	1,615609
	4.4	0,07459	0,072771	0,05959	4,122454	3,787425	3,289596
Coifflet	1	0,064721	0,059823	0,045462	3,576994	3,113554	2,509661
	5	0,088408	0,08706	0,069277	4,886185	4,531121	3,824353
Dnubechies - wavelet	2	0,063818	0,058509	0,04463	3,527087	3,045145	2,463748
	4	0,076434	0,073221	0,059668	4,22438	3,810867	3,293902
	10	0,08468	0,08208	0,06639	4,680095	4,271927	3,664989
Wavelet		0,127387	0,126954	0,132775	7,040467	6,60744	7,329703
Symlet	2	0,063818	0,058509	0,04463	3,527087	3,045145	2,463748
	8	0,080604	0,07727	0,062653	4,454827	4,021586	3,458675

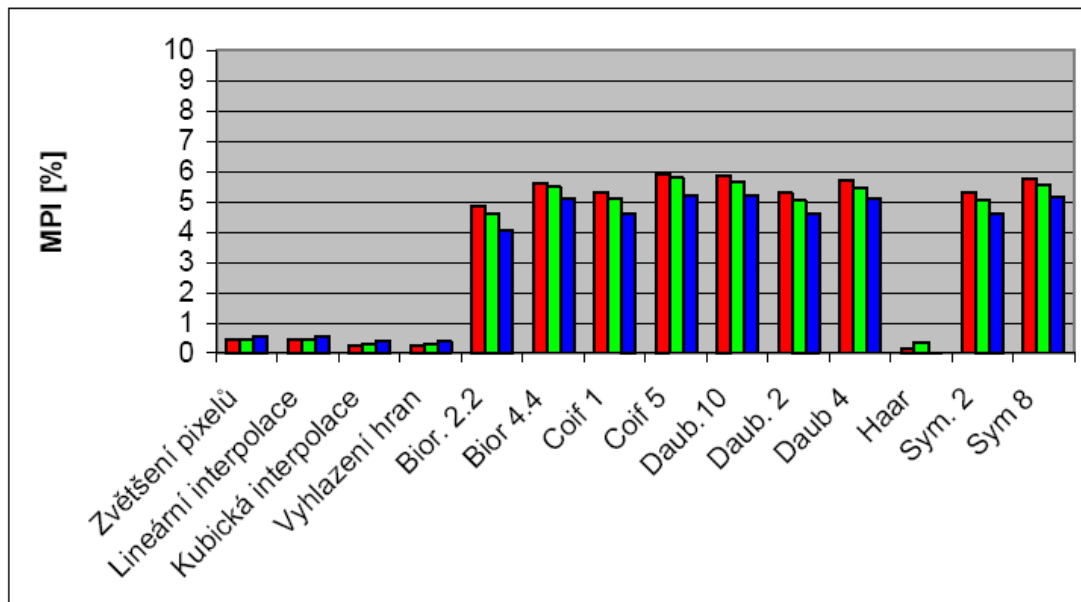
Tab.3.1: Tabulka porovnání zvětšených snímků s původním snímkem



Obr. 3.7: Graf porovnání zvětšených snímků s původním snímkem

Jméno	Rád metody	MPI R	MPI G	MPI B	MPI R %	MPI G %	MPI B %
Větší rozlišení		0,008381	0,009041	0,01017	0,464595	0,473461	0,564921
Zvětšení pixelů		0,008381	0,009041	0,01017	0,464595	0,473461	0,564921
Lineární interpolace		0,004283	0,005812	0,007054	0,237414	0,304325	0,391821
Kubická interpolace		0,004283	0,005812	0,007054	0,237414	0,304325	0,391821
Kubická interp. s vyhlazením hran		0,087399	0,0882	0,073312	4,845012	4,618668	4,072374
Biorťogonální wavelet	2.2	0,101628	0,104806	0,092003	5,633806	5,488262	5,110583
	4.4	0,095987	0,097252	0,083348	5,321121	5,092685	4,629862
Coifflet	1	0,106837	0,110569	0,094219	5,92257	5,790062	5,233695
	5	0,095567	0,096485	0,082966	5,297843	5,052541	4,608604
Daubechies - wavelet	2	0,102726	0,1047	0,092081	5,694691	5,482685	5,114949
	4	0,106068	0,108459	0,094184	5,879973	5,679565	5,231739
	10	0,002683	0,006727	0,000266	0,148734	0,352286	0,01477
Wav-haar,bmp		0,095567	0,096485	0,082966	5,297843	5,052541	4,608604
Symlet	2	0,104188	0,106566	0,092631	5,775749	5,580442	5,145512
	8	0,104188	0,106566	0,092631	5,775749	5,580442	5,145512

Tab. 3.2: Tabulka porovnání zvětšených snímků se snímkem s dvojnásobným rozlišením



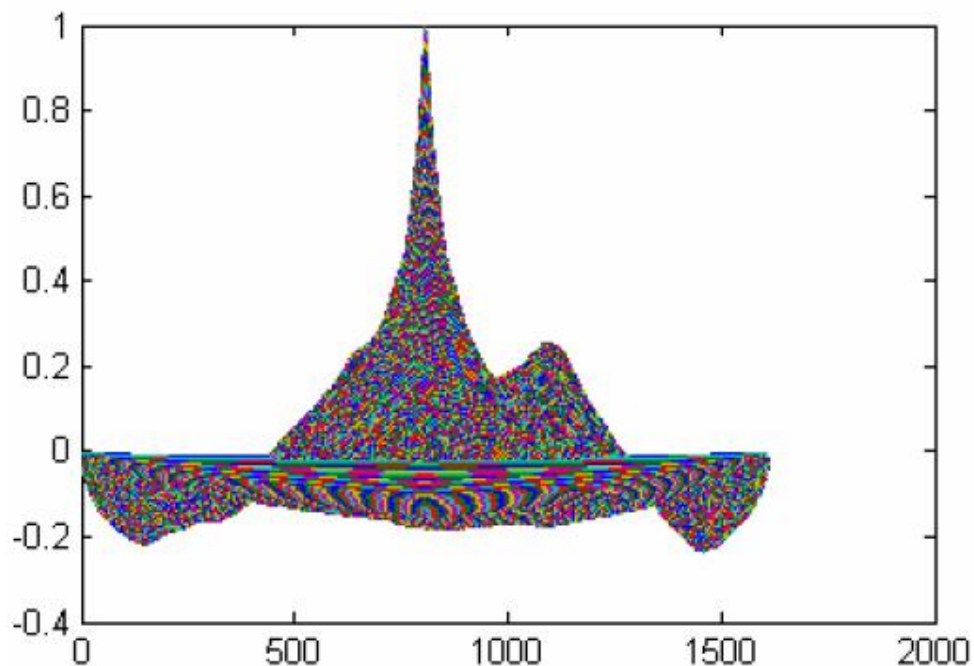
Obr. 3.8: Graf porovnání zvětšených snímků se snímkem s dvojnásobným rozlišením

3.2.3 Normalizovaná dvojrozměrná vzájemná korelace

Tato metoda se používá k vyhledávání oblasti obrazu, které jsou podobné. Sestává ze tří dílčích kroků :

1. Vypočítá se vzájemná korelace v prostorovém nebo kmitočtové oblasti v závislosti na velikost snímků.
2. Vypočítají se lokální součty
3. Lokální součty se použijí k normalizaci vzájemné korelace, abychom dostali korelační koeficienty.

Vypočítáme – li vzájemnou korelaci, a koeficienty korelace zobrazíme ve dvojrozměrném grafu, projeví se podobnost dvou oblastí jako globální maximum. V případě, že touto metodou porovnáváme dva podobné snímky, bude toto maximum přibližně ve středu plochy grafu (viz Obr. 3.10). Pro barevné snímky je potřeba tuto metodu aplikovat na všechny složky tvořící výslednou barvu zvlášť.



Obr. 3.9: Graf koeficientů vzájemné korelace

Tuto metodu lze pro srovnání použít samostatně, protože hodnota maxima je zároveň měřítkem podrobnosti, lze ji však také kombinovat s jinými metodami, například s histogramem obrazu, kde může nahradit subjektivní metodu vizuálního hodnocení podobnosti.

V porovnání s ostatními metodami se dvourozměrná vzájemná korelace jeví jako optimální metoda srovnání dvou snímků a hlavně z toho důvodu, že zohledňuje také vzájemnou polohu jednotlivých bodů ve snímku a poskytuje tak objektivní informaci o jejich vzájemné podrobnosti. Proto jsem se rozhodl použít tuto metodu pro hodnocení kvality snímků zvětšených pomocí waveletové transformace.

Pro toto hodnocení jsem požil sadu snímků, ve které jsou příklady obrazové informace z různých odvětví technické praxe.

4 VLIV ŠUMU NA ZVĚTŠOVÁNÍ SNÍMKŮ POMOCÍ WAVELETOVÉ TRANSFORMACE

Jedním ze způsobů posuzování kvality metod pro zpracování signálů, a tedy i obrazu, je vliv této metody na šum, který je v tomto signálu přítomen. V ideálním případě platí lineární závislost, to v našem případě znamená, že pokud aplikujeme metodu pro zvětšování obrazu na snímek obsahující šum, dostaneme stejný výsledek, jako kdybychom sečetli výsledky stejné metody pro aplikaci na nezašuměný snímek a na samotný šum zvlášť.

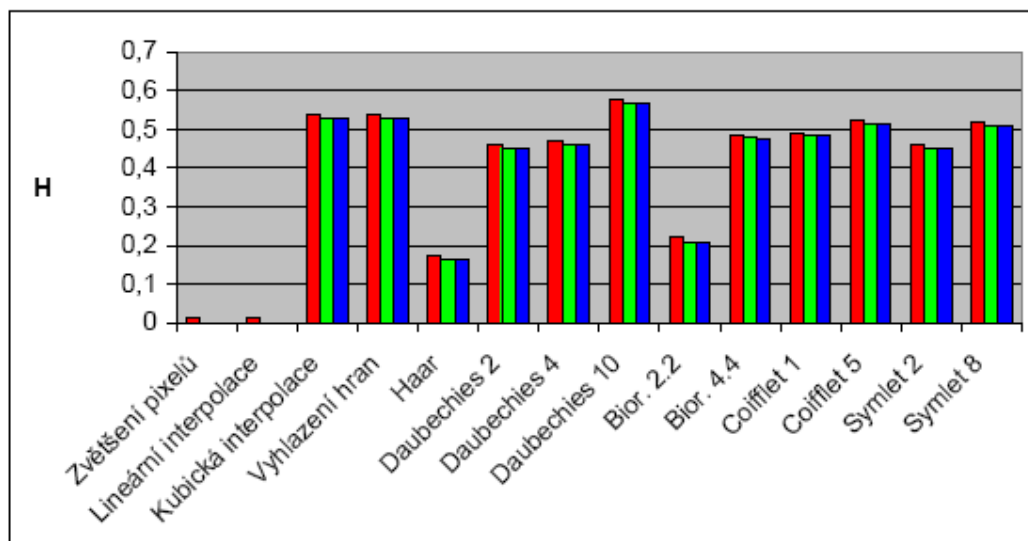
Pro srovnání jednotlivých metod zvětšování obrazu z hledisky jejich vlivu na šum přítomný v obraze jsem zvolil metodu, která se skládá z těchto kroků :

1. Všechny porovnávané metody jsem aplikoval na stejný snímek bez šumu a za přítomnosti gaussova šumu. Také jsem tuto metodu aplikoval na šum samotný.
2. Od zvětšeného snímku se šumem je odečetl zvětšený nezašuměný snímek a také „zvětšený“ šum. V ideálním případě by výsledkem byl černý snímek (všechny tři barevné složky každého pixelu by bylo rovny nule). Ve skutečnosti se však v tomto snímku nachází zbytkový šum.
3. Množství tohoto zbytkového šumu vypočítám pomocí entropie

Výsledky této metody aplikované na barevný obraz jsou shrnuty v následující tabulce a pro větší názornost také v grafu.

Použitá metoda	Řád metody	Entropie H		
		Červená	Modrá	Zelená
Zvětšování bodů		0,0139191	0,0000689	0,0000689
Lineární interpolace		0,0139191	0,0000689	0,0000689
Kubická interpolace		0,5387904	0,525654	0,5260935
Kubická interpolace s vyhlazením hran		0,5387904	0,525654	0,5260935
Haarův wavelet		0,1750608	0,1632526	0,1638763
Daubechieovský wavelet	2	0,460997	0,4528285	0,4528926
	4	0,4684619	0,4613211	0,4608783
	10	0,5774195	0,5667918	0,5660926
Biorťogonální wavelet	2.2	0,2222491	0,2073159	0,206874
	4.4	0,4860576	0,4772712	0,4768286
Coifletův wavelet	1	0,4909056	0,4829171	0,4824081
	5	0,5242661	0,5152106	0,514906
Symlet	2	0,460997	0,4528285	0,4528926
	8	0,5176301	0,5087161	0,5087364

Tab. 4.1: Tabulka entropií množství zbytkového šumu



Obr. 4.1: Graf entropií udávající množství zbytkového šumu

ZÁVĚR

Teorie waveletů je poměrně nová, ale přesto již byl vybudován rozsáhlý matematický základ. Tato práce je zaměřena na kompresi obrazu a zvětšování obrazových detailů, proto jsem zde se nezabýval dalšími možnostmi, ať v oblasti zpracování obrazu (např. „watermarking, neboli kódování dat do obrazu), nebo v oblasti matematické (např. řešení integrálních nebo diferenciálních rovnic).

Až donedávna se metoda aplikace waveletů při zpracování obrazu používala spíše ve speciálních případech. Nejznámější z nich je komprese otisků prstů, kde je waveletová transformace doplněna o tzn. SPIHT algoritmus, který v sobě zahrnuje ještě další kompresní metody, jako prahování a nerovnoměrné kódování.

Hlavní přínos své bakalářské práce spatřuji v návrhu metody pro zvětšování detailů obrazu pomocí využití waveletové transformace. Abych získal dostatek potřebných dat pro srovnávací analýzu, provedl jsem zvětšení snímku na dvojnásobek pomocí nejprve v současnosti běžně používaných metod :

- Zvětšování obrazových bodů
- Lineární interpolace
- Kubická interpolace
- Kubická interpolace s následným vyhlazením hran

Výsledky získané pomocí těchto metod jsem porovnal s výsledky získanými pomocí waveletové transformace. Také zvětšování snímku pomocí waveletové transformace jsme provedl pomocí několika různých waveletových funkcí. Vzhledem k tomu, že je neoptimalnější metodou optické zvětšení, použil jsem jako srovnávací základ snímek získaný pomocí dvojnásobného optického rozlišení.

Bakalářská práce je rozdělena tématicky do čtyř kapitol , které následují po všeobecném úvodu do problematiky zpracování obrazu. Teoretické a matematické základy, včetně příkladů několika nejznámějších waveletových funkcí, jsou uvedeny v kapitole 1. Kapitola 2 se zabývá praktickou částí zpracování obrazu pomocí waveletové transformace a kapitola 3 se zabývá metodami hodnocení kvality obrazu a vlastním hodnocením výsledků. Kapitola 4 se zabývá vlivem šumu na zvětšování obrazu pomocí waveletové transformace.

Pro hodnocení waveletové transformace použité pro zvětšování obrazu, jehož základem je porovnání zvětšených snímků, se nabízelo několik metod, z nichž jsem nakonec zvolil metodu porovnání dvou snímků pomocí dvourozměrné korelace. Vzhledem k tomu, že ostatní metody, jako například metoda porovnání histogramů, nebo metoda měření entropie nezohledňuje vzájemnou pozici jednotlivých bodů v obraze, se tato metoda jevila jako optimální.

SUMMARY

The wavelet theory is somewhat new but it has already a solid mathematic base. This study is primarily focused on compression and resizing of picture details only, that is why we tried to avoid unnecessary mathematic details, as integral and differential equations.

Not long time ago wavelet method was used exclusively in special cases.

This bachelor study is dividing in two theme chapter right after an introduction.

First chapter is focused on theory and on the mathematic basis used in this method . A few of the practical samples are mentioned in this chapter as well.

Second chapter is about a practical use of the wavelet transformation.

Next part of this study is dealing with the buzz problem using the wavelet transformation method to enlarge the picture image

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] VLČEK K.: *Kompresa a kódování zabezpečení v multimediálních komunikacích.*
BEN – technická literatura, Praha 2000
- [2] STRANG G., NQUYEN T.: *Wavelets and Filter Banks.* Wellesley – Cambridge Press 1996
- [3] BACHMAN G., NARICI L., BECKENSTEIN E.: *Fourier and wavelet analysis.* Springer-Verlag, New York 2000
- [4] VLČEK K.: *Přenos a záznam diskrétního obrazu.*, Ediční středisko VŠB- TU Ostrava 1998
- [5] RAO M.R., BODARDIKAR A.S.: *Wavelets transforms. Introduction to Theory and application.*, Addison Wesley Longman, Massachusetts, 1998
- [6] VLČEK K.: *Teorie informace, kódování kryptografie.*, Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 1994
- [7] ADÁMEK J.: *Kódování a teorie informace.*, Ediční středisko ČVUT Praha, 1994
- [8] ČASTOVÁ N.: *Waveletová transformace, sylab pro doktoranské studium,* VŠB 1997
- [9] PTÁČEK M.: *Digitální zpracování a přenos obrazové informace.*, NADAS Praha, 1983

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

d_n^l	Waveletové koeficienty transformovaného vektoru
G	Matice waveletových koeficientů
$\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$	Waveletové koeficienty.
H	Matice škálových koeficientů.
$\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$	Škálové koeficienty příslušné funkci f
$J_{s,f} x $	Operátor dyadické dilatace
$L^2(\mathbb{R})$	Lineární dvojrozměrný reálný prostor
LSB	Low Significant Bits, v kódovém slově označení bitů s nejnižší vahou
PDF	Hustota pravděpodobnosti snímků
$\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$	Posloupnost vektorů v prostoru $L^2(\mathbb{R})$
y	Originální vektor určený k transformaci
y_n^l	Škálové koeficienty transformovaného vektoru
f	Škálová funkce
$\psi(x)$	Wavelet

SEZNAM OBRÁZKŮ

- Obr. 1.1: Škálová a Waveletová funkce Haarova waveletu
- Obr. 1.2: Škálová a Waveletová funkce Daubechieovského waveletu 2.
- Obr. 1.3: Škálová a Waveletová funkce Daubechieovského waveletu 10.
- Obr. 1.4: Škálová a Waveletová funkce biortogonálního waveletu řádu 2.2 používaná pro rozklad
- Obr. 1.5: Škálová a Waveletová funkce biortogonálního waveletu řádu 2.2 používaná pro rekonstrukci
- Obr. 1.6: Škálová a Waveletová funkce biortogonálního waveletu řádu 4.4 používaná pro rozklad
- Obr. 1.7: Škálová a Waveletová funkce biortogonálního waveletu řádu 4.4 používaná pro rekonstrukci
- Obr. 1.8: Škálová a Waveletová funkce coifletova waveletu řádu 1.
- Obr. 1.9: Škálová a Waveletová funkce coifletova řádu 5.
- Obr. 1.10: Škálová a Waveletová funkce symletu řádu 1
- Obr. 1.11: Škálová a Waveletová funkce symletu 5.
- Obr. 1.12: Waveletová funkce morletu
- Obr. 3.1: Znázornění ideální (a) a skutečné (b) převodní charakteristiky
- Obr. 3.2: Znázornění chyby nulového bodu převodní charakteristiky
- Obr. 3.3: Vliv rozdílného zisku na průběh převodní charakteristiky
- Obr. 3.4: Snížení maximální odchylky skutečné a ideální převodní charakteristiky
- Obr. 3.5: Znázornění diferenciální nelinearity převodní charakteristiky
- Obr. 3.6: Příklad nemonotónní převodní charakteristiky
- Obr. 3.7: Graf porovnání zvětšených snímků s původním snímkem
- Obr. 3.8: Graf porovnání zvětšených snímků se snímkem s dvojnásobným rozlišením
- Obr. 3.9: Graf koeficientů vzájemné korelace

Obr. 4.1: Graf entropií udávající množství zbytkového šumu

SEZNAM TABULEK

Tab. 3.1: Tabulka porovnání zvětšených snímků s původním snímkem

Tab. 3.2: Tabulka porovnání zvětšených snímků se snímkem s dvojnásobným rozlišením

Tab. 4.1: Tabulka entropií množství zbytkového šumu